

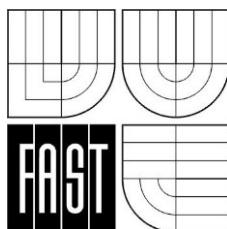
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

VLASTISLAV SALAJKA
PETR HRADIL
ALEŠ NEVAŘIL

PRUŽNOST A PEVNOST

MODUL BD02-MO2

TEORIE NAMÁHÁNÍ PRUTŮ



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu	5
1.4 Klíčová slova.....	5
2 Přehled probrané látky potřebné pro další studium.....	6
2.1 Úvod.....	6
2.2 Průřezové charakteristiky.....	6
2.2.1 Statické momenty plochy - první momenty plochy	7
2.2.2 Momenty setrvačnosti – druhé momenty plochy.....	7
2.2.3 Transformace momentů setrvačnosti při pootočení souřadnic.....	8
2.2.4 Poloměry setrvačnosti.....	8
2.3 Vnitřní síly a jejich průběhy.....	9
2.4 Diferenciální podmínky rovnováhy	9
2.5 Výslednice napětí	10
2.6 Základní případy namáhání prutu	10
3 Tah a tlak.....	12
3.1 Napětí při osovém tahu a tlaku	12
3.3 Přetvoření podélně namáhaného prutu.....	13
3.4 Dimenzování prutu namáhaného prostým tahem a tlakem	15
3.5 Kontrolní otázky	19
4 Prostý smyk.....	20
4.1 Napětí při prostém smyku.....	20
4.2 Smykové deformace.....	22
4.3 Poznámka k dimenzování šroubových a nýtových spojů	23
4.4 Kontrolní otázky	25
5 Ohyb nosníků.....	26
5.1 Napětí v ohýbaných nosnících	26
5.1.1 Normálová napětí při ohybu	26
5.1.2 Návrh a posouzení ohýbaného nosníku	29
5.1.3 Smyková napětí při ohybu – masivní průřez	33
5.1.4 Smyková napětí při ohybu v tenkostěnných nosnících.....	38
5.1.5 Střed smyku	40
5.2 Průhyb ohýbaných nosníků a pootočení průřezů	41
5.2.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry	41
5.2.2 Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry.....	44
5.2.3 Mohrova analogie pro výpočet průhybů a pootočení průřezů.....	51
5.3 Kontrolní otázky	54
6 Kroucení.....	55
6.1 Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu	55
6.2 Kroucení prutů masivního nekruhového průřezu.....	57

6.3	Volné kroucení tenkostěnných prutů otevřených průřezů.....	59
6.4	Volné kroucení prutů tenkostěnných uzavřených průřezů	60
6.5	Kontrolní otázky	61
7	Závěr	62
7.1	Shrnutí	62
8	Studijní prameny	63
8.1	Seznam použité literatury	63
8.2	Seznam doplňkové studijní literatury	64
8.3	Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	64

1 Úvod

1.1 Cíle

Tento modul věnovaný teorii namáhání prutů navazuje na první modul z tříčlené řady věnované předmětu Pružnost a pevnost.



Cílem tohoto modulu – teorie namáhání prutu je seznámit studenty se čtyřmi základními případy namáhání přímého prutu. Jedná se o tah a tlak, smyk, ohyb a kroucení. Na inženýrských předpokladech odvozené základní vztahy pro napětí a poměrnou deformaci a posun a pootočení průřezu, slouží pro návrh návrhem a posouzením průřezu prutu. Student získá představu o namáhání prutů, kterou uplatní v odborných předmětech při návrhu a posouzení konstrukcí z různých materiálů. Znalosti získané jsou nezbytné pro studium třetího modulu, který je věnován složeným případům namáhání prutů včetně stability.

1.2 Požadované znalosti

Pro zdárné pochopení uvedené látky je nutno vycházet ze znalostí získaných v předmětu Základy stavební mechaniky. Je nutno ovládat řešení staticky určitých nosníků, tj. stanovení podporových reakcí a průběhů vnitřních sil včetně korektního stanovení jejich smyslu a sestavení obrazců jejich průběhů. Dále je nutno ovládat výpočet těžiště, stanovení hlavních centrálních momentů setrvačnosti a poloměrů setrvačnosti. Umět aplikovat znalosti na výpočet průřezových charakteristik jednoduchých a složených průřezů. S jistotou se orientovat v tabulkách (rozlišovat správně veličiny k příslušným osám, korektně převádět rozměry atd.)



1.3 Doba potřebná ke studiu

Studijní text fakticky v rozsahu padesáti stran je rozdělen na čtyři základní kapitoly, které se liší jak rozsahem, tak hlavně náročností. Kapitulu věnovanou tahu a tlaku může dobře připravený student (čtenář) samostatně nastudovat během 32 hodin studia. Kapitulu věnovanou smyku zvládnem prakticky během 16 hodin. Studium nejrozsáhlejší a současně teoreticky nejnáročnější kapitoly věnované ohybu mu zabere kolem 64 hodin. Čas potřebný pro studium kapitoly věnované kroucení je asi 16 hodin. Doba potřebná pro samostatné studium doplňkové literatury není započtena.



1.4 Klíčová slova

Tah, tlak, smyk, ohyb, kroucení, napětí, deformace, zkosení, posunutí, průhyb, pootočení, dimenzování, průřezový modul, průřezové charakteristiky v kroucení.



2 Přehled probrané látky potřebné pro další studium

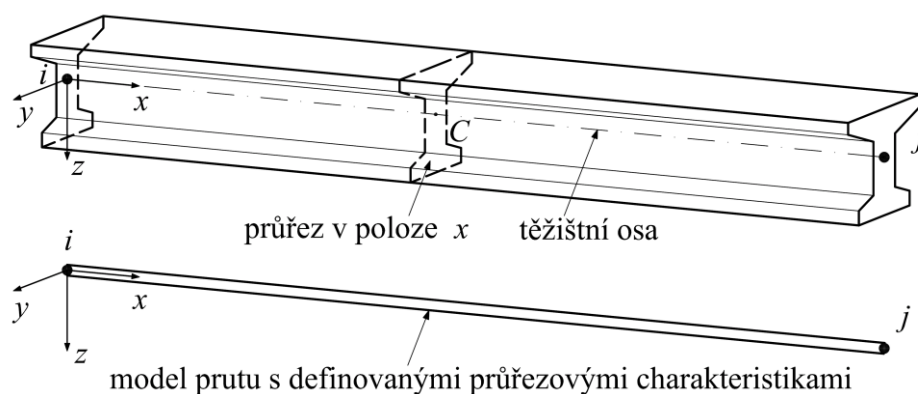


2.1 Úvod

Velké množství inženýrských konstrukcí obsahuje části (komponenty, prvky konstrukcí) jejichž rozměry ve dvou směrech jsou výrazně menší ve srovnání s rozměry ve třetím směru. Tyto komponenty jsou nazývány obecně pruty, ačkoliv jsou dále pojmenovány podle způsobu přenášení zatížení nebo podle konstrukčního uspořádání. Například jsou-li tyto pruty namáhány na tah, tak je nazýváme táhla, jsou-li namáhány na tlak potom hovoříme o vzpěrách nebo o sloupech. Příčně namáhaný prut se nazývá nosník atd. V případě uspořádání například spojením táhel a vzpěr lze vytvořit příhradovou konstrukci. Nosník vetknutý na jedné straně příčně zatížený se nazývá konzolou a tentýž prut namáhaný na tlak sloupem (je-li orientován svisle).

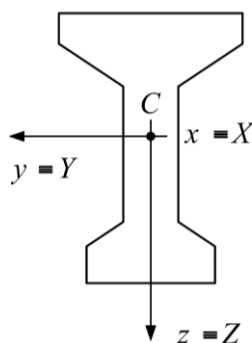
Konstrukce kompletně sestavené z nosníků se nazývají rámy a ty se dále člení podle dimenze na rovinné a prostorové.

Tato část (modul) bude pojednávat pouze o přímých prutech, viz obr. 1.1.



Obr. 2.1 - Prut v prostoru

2.2 Průřezové charakteristiky



Obr. 2.2 – Hlavní centrální osy průřezu

2.2.1 Statické momenty plochy - první momenty plochy

Uvažujme libovolný průřez prutu a dvě ortogonální osy y a z procházející těžištěm. Směr os může být libovolný, avšak vodorovný směr osy y a svislý směr osy z dolů přináší dvě výhody při analýze prutů: (1) průhyby prutu jsou větší směrem dolů, a jsou kladné ve směru osy z ; (2) kladný moment kolem osy y vyvolává tah ve spodních vláknech prutu, a tedy kladné hodnoty napětí v bodech s kladnou souřadnicí z . Statický moment plochy průřezu k ose y , respektive k ose z je definován těmito vztahy

$$U_y = \int_A z dA, \quad U_z = \int_A y dA. \quad (2.1)$$

Výrazy pro výpočet souřadnic těžiště $C(y_t, z_t)$ průřezu lze zapsat takto:

$$y_t = \frac{U_z}{A}, \quad z_t = \frac{U_y}{A}. \quad (2.2)$$

2.2.2 Momenty setrvačnosti – druhé momenty plochy

Momenty setrvačnosti se dělí na momenty setrvačnosti vztažené k osám - osové momenty setrvačnosti a k bodu (pólu) – polární momenty setrvačnosti.

Moment setrvačnosti I_y k ose z je definován jako součet členů získaných násobením jednotlivých elementů dA plochy A a jím odpovídajícím vzdálenostem z v druhé mocnině od osy y . Tedy:

$$I_y = \int_A z^2 dA. \quad (2.3)$$

Obdobně

$$I_z = \int_A y^2 dA. \quad (2.4)$$

Moment setrvačnosti I_{yz} k ose y a zároveň k ose z je nazýván deviačním momentem setrvačnosti a definován takto:

$$I_{yz} = \int_A yz dA, \quad (2.5)$$

kde y a z jsou vzdálenosti jednotlivých elementů dA plochy A od os z a y .

Polární moment setrvačnosti I_p k bodu osy x průřezu je definován takto:

$$I_p = \int_A r^2 dA. \quad (2.6)$$

Vzhledem ke vztahu $r^2 = (y^2 + z^2)$

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z. \quad (2.7)$$

Je-li osa y' paralelní s těžištní osou y a od ní vzdálená o c , potom

$$I_{y'} = I_y + Ac^2. \quad (2.8)$$

Uvedená rovnice je známa pod názvem teorém o paralelních osách nebo také Steinerova věta. Tento teorém dovoluje vyčíslovat momenty setrvačnosti průřezů složitého tvaru, a to tak, že průřez se rozdělí na řadu jednoduchých ploch A_e jejichž vlastní momenty setrvačnosti jsou známy. Je-li c_e vzdálenost těžišť jednotlivých ploch od osy y potom platí:

$$I_y = \sum_e (I_{ye} + A_e c_e^2). \quad (2.9)$$

2.2.3 Transformace momentů setrvačnosti při pootočení souřadnic

Uvažujme nový pootočený těžištní systém os, který je pootočen proti směru hodinových ručiček vůči původnímu systému o úhel α , viz obr. 2.2.

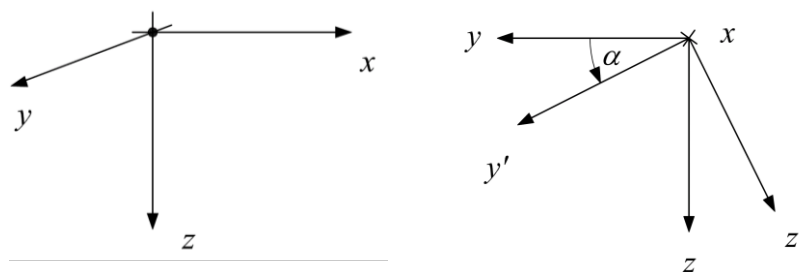
$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\alpha) - I_{yz}\sin(2\alpha), \quad (2.10)$$

$$I_{z'} = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\alpha) + I_{yz}\sin(2\alpha), \quad (2.11)$$

$$I_{y'z'} = \frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\alpha) + I_{yz}\cos(2\alpha). \quad (2.12)$$

Pro jistou orientaci os y' a z' deviační moment setrvačnosti $I_{y'z'}$ je roven nule. Při označení těchto souřadnic Y a Z , potom I_Y a I_Z se nazývají hlavními momenty setrvačnosti průřezu a osy Y a Z jsou hlavními osami.

Poznámka: Momenty setrvačnosti rovinného obrazce k hlavním osám procházejícím těžištěm průřezu se nazývají hlavními centrálními momenty setrvačnosti a příslušné osy hlavními centrálními osami setrvačnosti.



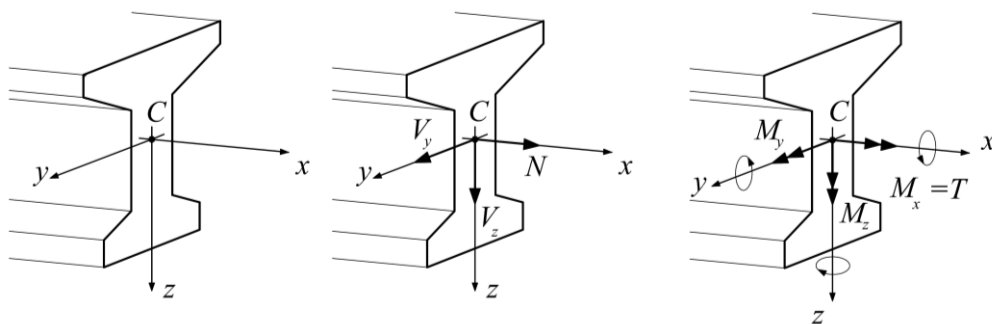
Obr. 2.3 – Kladný souřadný systém a kladný směr pootáčení souřadnic

2.2.4 Poloměry setrvačnosti

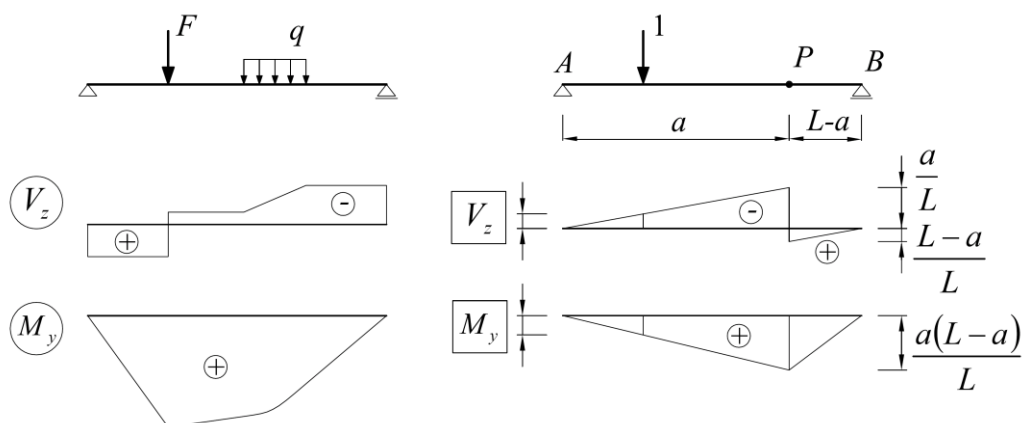
Poloměr setrvačnosti k ose y i_y resp. k ose z i_z rovinného obrazce se určí pomocí momentů setrvačnosti k příslušným osám I_y , I_z a plochy průřezu A pomocí vztahů

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (2.13)$$

2.3 Vnitřní síly a jejich průběhy

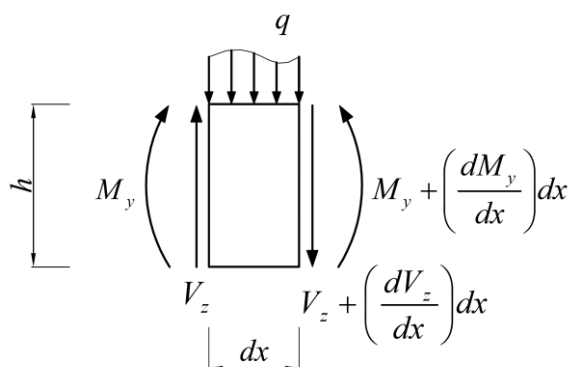


Obr. 2.4 - Kladný systém vnitřních sil



Obr. 2.5 – Průběhy vnitřních sil v rovině a příčinkové čáry

2.4 Diferenciální podmínky rovnováhy



Obr. 2.6 – Diferenciální podmínky rovnováhy

Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu v rovině xz , které platí mezi složkami vnitřních sil a vnějším spojitým zatížením nosníku lze zapsat ve tvaru

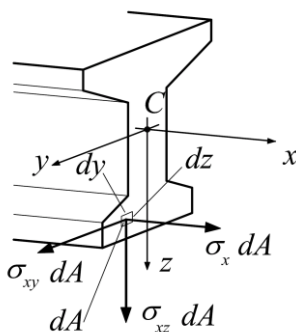
$$\frac{dN}{dx} = -n, \quad \frac{dV}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = V + m. \quad (2.14)$$

V případě prostorově zatíženého přímého prutu, který je umístěn v pravotočivé soustavě souřadnic xyz , kde osa x je totožná se střednicí prutu a osy y resp.

z jsou centrálními osami setrvačnosti průřezu, tj. těžištní osy průřezu, lze diferenciální podmínky rovnováhy zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -n_x & \frac{dT}{dx} &= -t \\ \frac{dV_y}{dx} &= -q_y & \frac{dM_y}{dx} &= V_z \\ \frac{dV_z}{dx} &= -q_z & \frac{dM_z}{dx} &= V_y \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.5 Výslednice napětí



Obr. 2.7 – Složky napětí

Napětí působící v libovolném průřezu silově namáhaného prutu je obvykle reprezentováno jejich výslednicemi, viz níže uvedená tabulka.

Výslednice	Definující rovnice
Osová síla N	$N = \int_A \sigma_x dA . \quad (2.16)$
Ohybový moment kolem osy y M_y	$M_y = \int_A \sigma_x z dA . \quad (2.17)$
Ohybový moment kolem osy z M_z	$M_z = - \int_A \sigma_x y dA . \quad (2.18)$
Příčná síla ve směru osy y V_y	$V_y = \int_A \tau_{xy} dA . \quad (2.19)$
Příčná síla ve směru osy z V_z	$V_z = \int_A \tau_{xz} dA . \quad (2.20)$
Krouticí moment T	$T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA . \quad (2.21)$

Uvedené vztahy vyjadřují podmínky statické ekvivalence vnitřních sil v průřezu prutu.

2.6 Základní případy namáhání prutu

Chování prutu je ovlivněno průběhem vnitřních sil měnících se podél prutu. V obecném případě silové působení lze popsat průběhy šesti vnitřních sil. V závislosti na působícím zatížení a uložení prutu mohou některé vnitřní síly

namáhat prut výrazně více než ostatní vnitřní síly. Potom síly mající malý vliv na namáhání prutu mohou být zanedbány. V krajním případě lze namáhání prutu rozdělit na čtyři základní případy namáhání, a to podle jediné převládající vnitřní síly. Podle povahy působení lze namáhání prutu rozdělit na:

prostý tah a tlak – vznikající při působení normálové síly N ,

prostý smyk – vznikající při působení posouvající síly V ,

prostý ohyb – vznikající při působení ohybového momentu M ,

prosté kroucení – vzniká při působení kroucího momentu T .

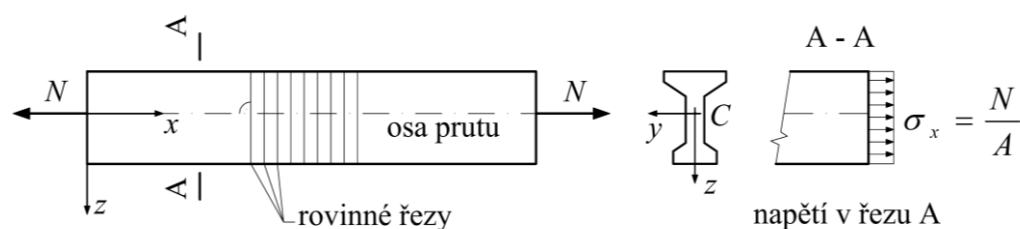
Uvedené případy lze nazvat základními a jejich kombinací vznikají některé speciálně definované případy složeného namáhání. O těchto kombinacích bude pojednáno v modulu 3.

3 Tah a tlak

3.1 Napětí při osovém tahu a tlaku



Prostý tah resp. tlak nastane u přímého prutu pouze tehdy, když jedinou nenulovou složkou vnitřních sil prutu je normálová síla N , tedy $N \neq 0$ a všechny ostatní složky výslednice vnitřních sil jsou rovny nule. Je-li normálová síla $N > 0$, podle zavedené konvence se jedná o tah, v opačném případě je-li $N < 0$ o tlak.



Obr. 3.1 – Tažený prut a normálové napětí v prutu

Vzhledem k symetrii soustavy v určité vzdálenosti od místa přiloženého zatížení lze předpokládat:

1. že průřezy se nekřiví, zůstávají rovinné a kolmé ke střednicové ose i po deformaci prutu (Bernoulliho hypotéza)
2. že podélná „vlákna“ na sebe vzájemně „netlačí“.

Z prvního předpokladu vyplývá, že nedochází ke zkosení průřezu $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ a tedy smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz} jsou rovna nule. V důsledku rovnoběžnosti jednotlivých průřezů lze popsat jejich podélné přemístění jedinou funkcí posunutí $u(x)$. Vzhledem k tomu, že průřezy jsou rovinné, potom i poměrné deformace v každém bodě řezu jsou konstantní. Vlastnost materiálu prutu je popisována modulem pružnosti materiálu E . Vztah mezi napětím a deformací lze vyjádřit pomocí fyzikální rovnice $\sigma_x = E\varepsilon_x$, kde σ_x je normálové napětí a v tomto případě opět konstantní v průřezu. Na základě předpokladu, že podélná „vlákna“ na sebe vzájemně „netlačí“ je možné definovat, že normálové napětí σ_y a σ_z tj. napětí v rovinách kolmých k prutu se rovnají nule.

Z výše uvedeného vyplývá, že v případě prostého tlaku ze šesti složek vektoru napětí se uplatní pouze normálové napětí $\sigma_x \neq 0$. Tento stav napjatosti bývá nazýván jednoosou (přímkovou) napjatostí.

Napětí v průřezu prutu musí splňovat podmínky statické ekvivalence vnitřních sil. Podmínky, které obsahují smyková napětí (jež jsou rovny nule) jsou splněny identicky, neboť výslednice $V_y = V_z = T = 0$. Zbývající tři rovnice, ve kterých se vyskytuje normálové napětí lze zapsat ve tvaru

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A,$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \sigma_x \int_A z dA = 0,$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y dA = -\sigma_x \int_A y dA = 0.$$

Vzhledem k tomu, že statické momenty U_y a U_z k těžištním osám y a z jsou rovny nule. Potom ve výše uvedených rovnicích ohybové momenty M_y a M_z jsou taktéž rovny nule, neboť výrazy $\int_A z dA$ a $\int_A y dA$ v uvedených rovnicích představují statické momenty k těžištním osám y a z .

Vztah pro výpočet normálového napětí σ_x v průřezu prutu v poloze x lze určit z první rovnice

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (3.1)$$



Poznámky k výpočtu normálového napětí od ohybu

Pruty proměnného průřezu:

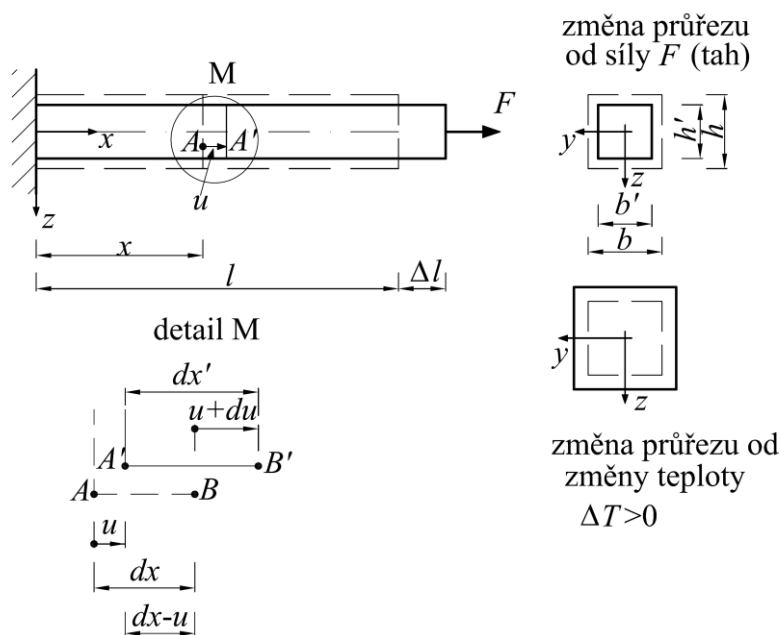
V případě pozvolné změny průřezu platí a lze použít pro výpočet normálového napětí σ_x výše uvedené vztahy. Vlastní rozdělení normálového napětí po průřezu se blíží konstantnímu rozdělení. Dochází však ke vzniku smykových napětí, která nenabývají velkých hodnot.



Pruty s náhlou změnou průřezu

V případě náhlé změny průřezu (otvor, vrub, zúžení) již neplatí Bernoulliho předpoklad o zachování rovinnosti průřezu. V nejvíce oslabených místech je napětí rozděleno silně nerovnoměrně. Výpočet maximální hodnoty napětí lze provést pomocí součinitele koncentrace napětí k (závisí na geometrii prvku) a oslabené plochy průřezu A_{osl} .

3.3 Přetvoření podélně namáhaného prutu



Obr.3.2 – Protažení prutu

Funkce posunutí průřezu a její derivace

Známe-li funkci posunutí průřezu $u(x)$ tahem namáhaného nosníku, potom můžeme dopočítat jak deformace, tak i napětí v prutu známe-li patřičné závislosti.

Je důležité definovat vztah mezi funkcí posunutí $u(x)$ a funkcemi poměrné deformace ε_x , ε_y a ε_z . ($\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$). Je-li v místě x funkce posunutí $u(x)$, potom v místě $x+dx$ funkce $u(x+dx) = u(x) + du(x)$, viz obr. 3.2. Délka původní elementární části prutu dx se změní na $dx' = dx + du$.

Poměrná deformace



$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx}. \quad (3.2)$$

Derivací funkce posunutí $u(x)$ získáme poměrnou deformaci $\varepsilon_x(x) = \text{konst.}$

Vzhledem ke vztahu $\sigma_x = E\varepsilon_x$ můžeme pro proměnný průřez zapsat



$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)}. \quad (3.3)$$

Tato rovnice se nazývá diferenciální rovnice taženého prutu. Integrací rovnice získáme rovnici pro výpočet posunutí

$$u(x) = \int \frac{N(x)}{E(x)A(x)} dx + C, \quad (3.4)$$

kde, C je integrační konstanta, kterou lze určit z okrajových podmínek.

V případě zatížení prutu stálého průřezu osovou silou N dochází k délkovému prodloužení všech jeho elementů dx , což se projevuje posunutím jednotlivých průřezů. Relativní vzájemnou změnu polohy průřezů v souřadném systému x lze vyjádřit takto

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{N}{EA} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{N(x_2 - x_1)}{EA}. \quad (3.5)$$

Pro prut délky l , kde počátek prutu odpovídá souřadnici $x_1=0$ a konec prutu souřadnici $x_2=l$, potom platí vztah vyjadřující celkové jeho prodloužení, či zkrácení



$$\Delta l = u(x_2) - u(x_1) = \frac{Nl}{EA}. \quad (3.6)$$

V tomto vztahu výraz

$$d = \frac{l}{EA} \quad (3.7)$$

se nazývá poddajnost prutu v tahu respektive v tlaku a inverzní hodnota k prutová tuhost prutu v tahu respektive v tlaku.

$$k = \frac{EA}{l}. \quad (3.8)$$

Tuhost prutu v tahu, resp. tlaku k lze definovat jako sílu potřebnou k protažení, zkrácení prutu o jednotkovou délku.

Vraťme se opět k obrázku 3.2, ze kterého je patrné, že vlivem působící normálové síly nastane změna příčných rozměrů.

Koeficient vyjadřující poměr příčné deformace k podélné se nazývá součinitel příčné kontrakce, nebo také Poissonův součinitel ν . Tedy platí

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|, \quad \nu = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|. \quad (3.9)$$



Příčné zkrácení ve svislém směru obdélníkového průřezu při tahu se dá vyčíslit ze vztahu

$$\Delta h = h' - h = h \cdot \varepsilon_z = -h \cdot \nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \frac{Nh}{EA}. \quad (3.10)$$

Obdobně ve vodorovném směru

$$\Delta b = b' - b = b \cdot \varepsilon_z = -b \cdot \nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \frac{Nb}{EA}. \quad (3.11)$$

Je známo, že změna teploty vyvolává změnu rozměrů těles. V případě že se teplota změní v celém prutu stejně (rovnoměrné oteplení či ochlazení), potom celkové prodloužení prutu se dá vyjádřit ze vztahu

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_{xT} dx = \int_0^l \alpha_T \Delta T dx = \alpha_T \Delta T l, \quad (3.12)$$



kde, α_T je součinitel teplotní roztažnosti materiálu a ΔT rovnoměrná změna teploty.

3.4 Dimenzování prutu namáhaného prostým tahem a tlakem

Posouzení konstrukcí se provádí na základě teorie mezních stavů, a to z hlediska mezních stavů **únosnosti** a z hlediska mezních stavů **použitelnosti**. U prutů namáhaných tahem resp. tlakem se provádí zejména **posouzení na únosnost**. Posouzení na použitelnost není ve většině případů nutné provádět, jelikož délkové změny prutů jsou zpravidla menší než maximální přípustné hodnoty.

V případě prutů namáhaných tlakovou silou je nutné při výpočtu předpokládat, že ztráta únosnosti je vyvolána ztrátou stability, a proto je nutné tyto pruty posuzovat na vzpěr. Posouzení na prostý tlak bez zahrnutí vzpěru lze provést pouze u masivních relativně krátkých prutů.

Posouzení spočívá v porovnání vypočtených napětí s přípustnými napětími popř. vypočtených normálových sil s normálovými silami na mezi únosnosti.

Jedním z kritérií mezního stavu únosnosti je překročení pevnosti materiálu. V tomto případě je nutno posoudit, například u oceli, zda-li napětí nepřekračuje návrhovou pevnost materiálu. Hodnota návrhové pevnosti f_d se určuje ze vztahu

$$f_d = f_k / \gamma_M, \quad (3.13)$$

kde f_k je charakteristická hodnota pevnostní veličiny (meze kluzu f_y nebo pevnosti v tahu f_u) a γ_M je dílčí součinitel spolehlivosti materiálu. Například u dře-

va se zavádí ještě součinitel zahrnující délku trvání zatížení a vlhkosti dřeva k_{mod} , kterým se hodnota návrhové pevnosti obvykle snižuje.

Z hlediska spolehlivosti při mezním stavu únosnosti musí být konstrukce navržena tak, aby byla splněna podmínka:

$$\gamma_n S_d \leq R_d, \quad (3.14)$$

kde S_d je účinek extrémního návrhového zatížení, R_d je návrhová únosnost a γ_n je součinitel účelu konstrukce. Z hlediska lepšího pochopení bude návrh a posouzení jednotlivých prvků konstrukcí vycházet z hodnot napětí a ne, jak se převážně u stavebních konstrukcí provádí, z hodnot vnitřních sil (3.14), a to ještě zjednodušeně.

Návrh a posouzení taženého (tlačeného) prutu

Při návrhu definujeme z jakého materiálu bude konstrukce zhotovena a určíme minimální průřezovou plochu ze vztahu



$$A_{\min} \geq \frac{N}{f_d}, \quad (3.15)$$

kde f_d je hodnota návrhové pevnosti v tahu (tlaku). Na základě získané minimální plochy $A_{\min}$ navrhujeme prakticky přípustné rozměry průřezu a provedeme posouzení.

Při posouzení použijeme vztah

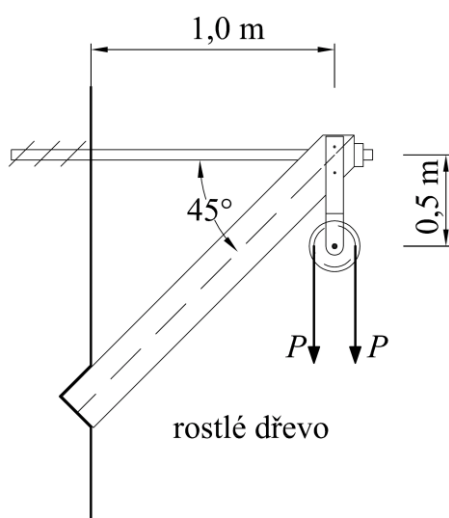


$$\sigma = \frac{N}{A} \leq f_d. \quad (3.16)$$

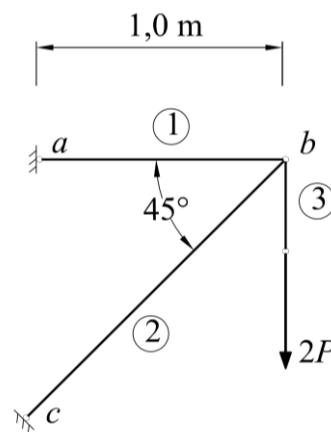


Příklad:

Navrhněte průřezy prutů konstrukce zvedáku (prut 1 a 2) umožňující zvedat břemeno $P = 20$ kN. Prut 1 představuje ocelové táhlo kruhového průřezu a prut 2 dřevěnou vzpěru čtvercového průřezu. Dále určete pro uvedené zatížení posuv bodu b .



Obr.3.3 – Schéma jednoduché konstrukce



Obr. 3.4 – Statické výpočtové schéma

Materiálové vlastnosti konstrukce:

Ocel $f_k = 235 \text{ MPa}$, $\gamma_M = 1,15$, $E_o = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 210 \text{ GPa}$. Pro ocel návrhová pevnost

$$f_d = \frac{f_y}{\gamma_M} = \frac{235}{1,15} = 204,3 \text{ MPa}.$$

Dřevo rostlé (borovice, třídy SI) – charakteristická pevnost v tlaku $f_{c,0,k} = 20 \text{ MPa}$, $\gamma_M = 1,45$, $k_{mod} = 0,8$, $E_0 = 1 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 10 \text{ GPa}$. Potom návrhová pevnost dřeva v tlaku

$$f_{c,0,d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 0,8 \cdot \frac{20}{1,45} = 11,03 \text{ MPa}.$$

Řešení:

Statická určitost: Zavedení kloubu v místě uchycení a vychází z úvahy, že ocelová tyč přenáší účinky pouze v tahu, ohybově je měkká a tedy není schopna přenášet momenty. Obdobně i v místě b . Dřevěná opěra v místě c je evidentně kloubově uložena. Tímto získáme statické schéma, viz obr. 3.4, odpovídající jednoduché příhradovině. Statická určitost se určí např. $2 \times 3 - 2 - 4 = 0$. Konstrukce je staticky určitá.

Výpočet osových sil:

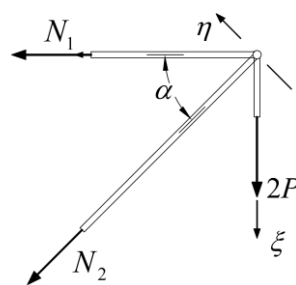
S využitím dvou podmínek rovnováhy

$$\sum F_\xi = 0 \Rightarrow N_2 \cdot \sin \alpha + 2P = 0,$$

$$\sum F_\eta = 0 \Rightarrow N_1 \sin \alpha - 2P \cos \alpha = 0$$

získáme osově síly

$$N_1 = 2P, \quad N_2 = -\frac{2P}{\sin \alpha}.$$



Obr. 3.5 – Vnitřní síly v prutech

Po dosazení číselných hodnot

$$N_1 = 2P = 40 \text{ kN}, \quad N_2 = -\frac{2P}{\sin \alpha} = -56,57 \text{ kN}$$

a osová síla v závěsu

$$N_3 = 2P = 40 \text{ kN}.$$

Návrh průřezu prutu 1

S využitím návrhového vzorce – tažená ocelová tyč

$$^1\sigma = \frac{N_1}{A_1} \leq f_d \Rightarrow A_1 \geq \frac{N_1}{f_d} = \frac{40 \cdot 10^3}{204,3 \cdot 10^6} = 1,957 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 195,79 \text{ mm}^2.$$

$$\text{Kruhový průřez } A_1 = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = 15,78 \text{ mm},$$

Navrhujeme $d_{nav} = 16 \text{ mm}$ ($^1A_s = 201,06 \text{ mm}^2$).

Posouzení průřezu prutu 1

$$^1\sigma = \frac{40 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}} = 1,989 \cdot 10^8 = 198,9 \text{ MPa} < 204,3 \text{ MPa}.$$

Návrh průřezu prutu 2

$$A_2 \geq \frac{N_2}{f_{c,0,d}} = \frac{56,57 \cdot 10^3}{11,03 \cdot 10^6} = 5,128 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 5128,73 \text{ mm}^2.$$

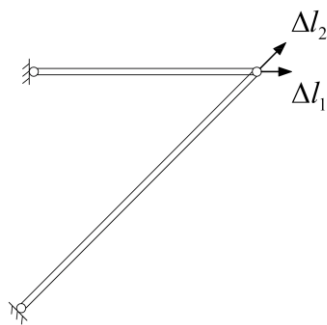
Čtvercový průřez $a = \sqrt{A_2} = 71,6 \text{ mm}$,

$$a_{náv} = 80 \text{ mm}, A_s = 6400 \text{ mm}^2,$$

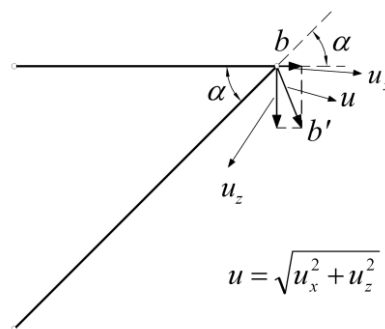
$$^2\sigma = \frac{-56,57 \cdot 10^3}{6400 \cdot 10^{-6}} = -8,839 \cdot 10^6 \cong -9 \text{ MPa} < 11,3 \text{ MPa}.$$

Protože poměr $\frac{l}{a} \cong 17,7 < 20$, lze zanedbat vzpěr u tlačného dřevěného prutu.

Výpočet posunutí bodu b



Obr. 3.6 - Prodloužení prutů 1 a 2



Obr. 3.7 – Posunutí bodu b

Prodloužení prutu 1 v závislosti na složkách posunutí $\Delta l_1 = u_x$

Prodloužení prutu 2 v závislosti na složkách posunutí $\Delta l_2 = u_x \cos \alpha - u_z \sin \alpha$

Řešením výše uvedených rovnic získáme složky posunutí $u_x = \Delta l_1$ a

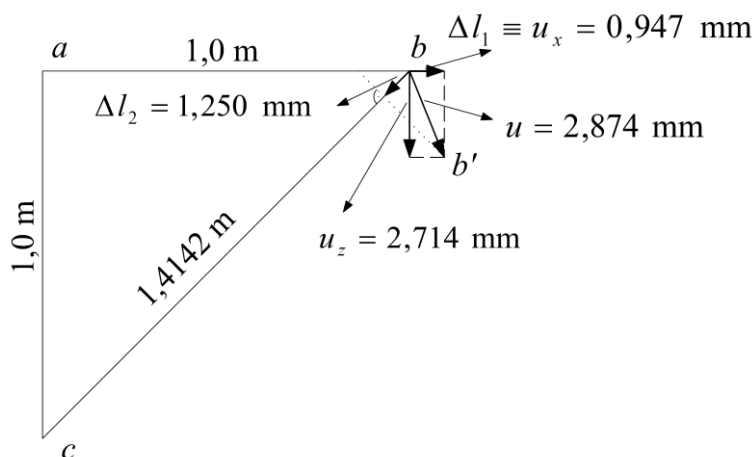
$$u_z = (\Delta l_1 \cos \alpha - \Delta l_2) \frac{1}{\sin \alpha}.$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}} = 9,47 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,947 \text{ mm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{-56,57 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1,4142}{1 \cdot 10^{10} \cdot 6400 \cdot 10^{-6}} = -1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,25 \text{ mm},$$

Vodorovné posunutí $u_x = 0,947 \text{ mm}$.

$$\text{Svislé posunutí } u_z = 0,947 - (-1,25) \frac{1}{\sin 45^\circ} = 2,714 \text{ mm}.$$



Obr. 3.8 - Zobrazení plánu posunutí uzlu b v závislosti na prodloužení uzlů

Celkové posunutí $u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2} = 2,874 \text{ mm}$.



3.5 Kontrolní otázky



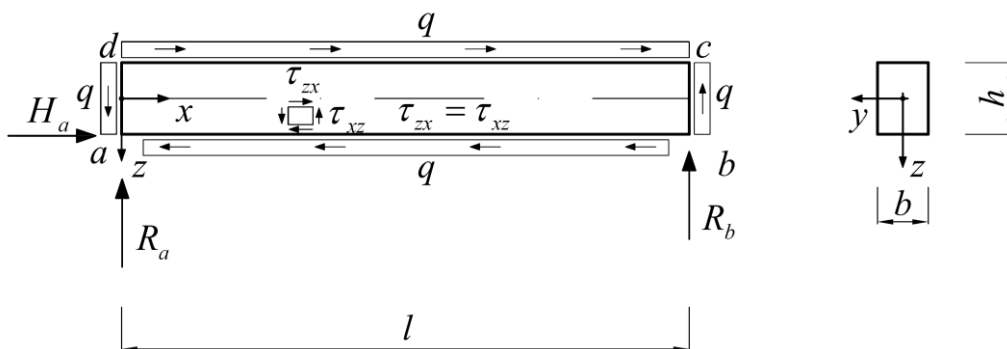
1. Za jakých podmínek je prut namáhán prostým tahem nebo tlakem ?
2. Jaké je rozdělení napětí po průřezu při namáhání prostým tahem nebo tlakem ?
3. Na kterých veličinách závisí tuhost prutu v tahu, resp. v tlaku ?

4 Prostý smyk

4.1 Napětí při prostém smyku



Prostý smyk prutu je charakterizován tím, že v libovolném jeho průřezu působí pouze posouvající síla (ostatní složky vnitřních sil jsou nulové), což u reálných konstrukcí je případem zcela výjimečným. Z hlediska napjatosti v bodě, o prostém či čistém smyku hovoříme tehdy, když v tomto bodě proložíme tři navzájem kolmé roviny tak, aby na nich nepůsobila žádná složka normálových napětí, ale pouze složky smykových napětí. Obvykle vystačíme s rovinnou úlohou, kdy je nenulová jen jedna z dvojic vzájemně si rovných smykových napětí. Při prostém (čistém) smyku nevznikají podélné (objemové) deformace, ale tvarové deformace – změna úhlů mezi rovinami – zkosení, řídící se Hookeovým zákonem. Abychom získali v celém nosníku (viz. obr. 4.1) pouze smykové napětí, je nutno tento nosník zatížit tečným zatížením na všech okrajích nosníku. Jedná se o ryze teoretický případ zatížení.



Obr. 4.1 – Prostý nosník zatížený pouze smykovým zatížením

Z momentové podmínky rovnováhy např. k bodu b získáme

$$-R_a l - q l h + q h l = 0, \text{ že } R_a = 0.$$

Potom, i $R_b = 0$ a $H_a = 0$.

Posouvající síla a ohybový moment v průřezu x je potom dán vztahy

$$V_z = V_z(x) = -q h,$$

$$M_y = M_y(x) = -q h x + 2 q x \frac{h}{2} = 0.$$

V tomto případě v příčných řezech nevznikají normálová napětí a ve všech bodech nosníku existuje stav prostého (čistého) smyku. Hodnota smykového napětí je dána vztahem



$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{A}, \quad (4.1)$$

kde $A = b h$ je plocha průřezu. Napětí po průřezu je konstantní.

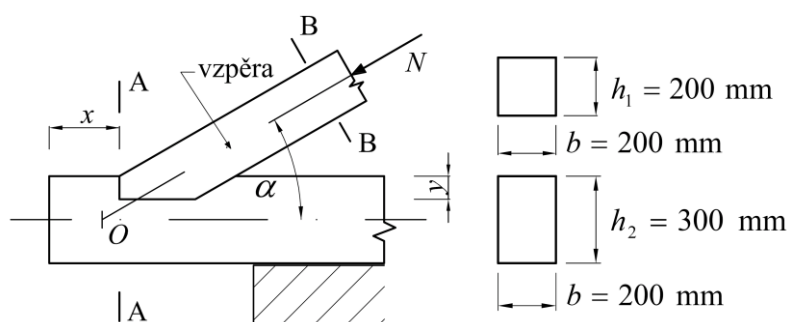
S výše uvedeným způsobem zatížení se prakticky u běžně zatížených nosníků nesetkáváme. V běžných případech se prakticky vždy současně vyskytuje i

normálové napětí, buď od tahu (tlaku), či ohybu. V případě ohýbaných prutů se jedná o smyk za ohybu, u kterého se průběh smykové napětí po průřezu řídí jiným přesnějším vztahem.

V důsledku smykového namáhání může u konstrukčních prvků dojít k porušení usmyknutím (stříhem). Tedy hovoříme o namáhání na stříh, při kterém rozdělení napětí ve sledovaném průřezu se počítá zjednodušeně podle vztahu (4.1).

Jde především o návrh a posouzení spojů u ocelových a dřevěných konstrukcí. U ocelových konstrukcí se uvedené teorie využívá při návrhu a posouzení nýtovaných, šroubovaných a svařovaných spojů. Obdobně jako u ocelových konstrukcí se u dřevěných konstrukcí obdobně posuzují spoje zhlaví trámů, hmoždíky, atd. i betonových a zděných konstrukcí. Zjednodušeně lze i posoudit únosnost smykově namáhaných zděných a betonových konstrukcí.

Příklad:



Obr. 4.2 - Spojení prvků krovu

Navrhněte a posuďte spojení prvků krovu, viz obr. 4.2. Osová síla $N = 60 \text{ kN}$ a úhel $\alpha = 30^\circ$. Dřevo použité na konstrukci je borovice. Návrhová pevnost pro smykové spoje při zatížení působícím ve směru vláken

$$f_{v,d} = k_{\text{mod}} \cdot \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} = 0,8 \cdot \frac{2,4}{1,45} = 1,32 \text{ MPa} \text{ a návrhová pevnost v tlaku } f_{c,0,d} =$$

11,3 MPa.

Postup řešení:

Ze statických podmínek rovnováhy získáme

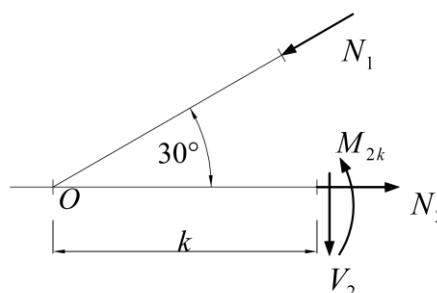
$$N_2 = N_1 \cos \alpha = 51,96 \text{ kN}.$$

$$V_2 = N_1 \sin \alpha = -30 \text{ kN}.$$

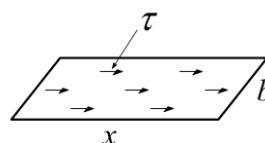
Konec vaznice je namáhán vodorovnou silou

$$N_2 = 51,96 \text{ kN}.$$

Délku x definující oblast možného usmyknutí určíme úpravou vztahu



Obr. 4.3 - Statické schéma



Obr. 4.4 - Plocha usmyknutí

$$\tau_{\max} = \frac{N_2}{A_{odst}} = \frac{N_2}{b_2 x} \leq f_{v,d} = 1,32 \text{ MPa.}$$

$$\text{Potom } x \geq \frac{N_2}{b f_{v,d}} = \frac{51,96 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 1,32 \cdot 10^6} = 0,196 \text{ m} \cong 200 \text{ mm,}$$

navrhujeme $x = 300 \text{ mm}$.

Dále je nutno určit hloubku zářezu, tak aby nedošlo k vymáčknutí v místě vzdorovného působení vzpěry.

Nutnou plochu vzdorující otlačení určíme ze vztahu

$$\sigma = \frac{N_2}{A_{out}} \leq f_{c,0,d} \Rightarrow A_{out} \geq \frac{N_2}{f_{c,0,d}}.$$

$$\text{Po číselném dosazení } A_{out} \geq \frac{51,96 \cdot 10^3}{11,03 \cdot 10^6} = 4,71 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 4710 \text{ mm}^2.$$

Šířka průřezu je dána, potom hloubka zářezu

$$y = \frac{A_{out}}{b} = \frac{4710}{200} = 23,6 \text{ mm.}$$

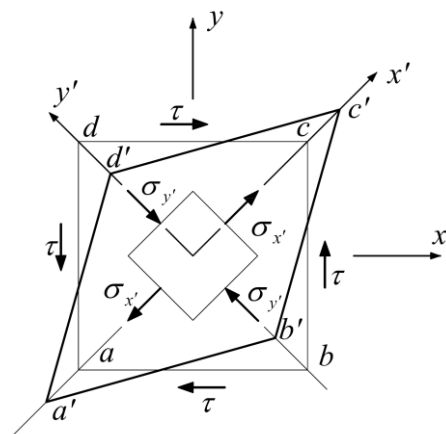
Navrhujeme $y = 30 \text{ mm}$.



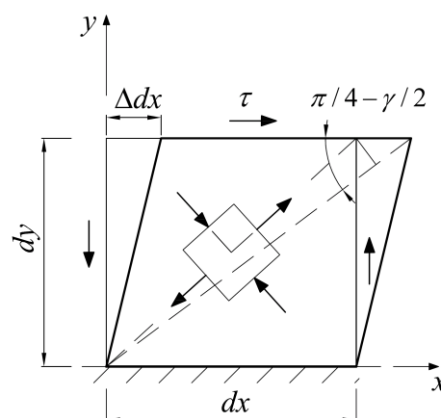
4.2 Smykové deformace



Při výpočtu řady prvků konstrukcí se velmi často setkáváme s případem rovinné napjatosti, kdy na čtyřech stranách pravoúhlého elementárního prvku působí pouze smykové napětí, viz obr. 4.5. Jak bylo uvedeno výše jedná se o prostý (čistý) smyk v rovině. Sledujme deformaci prvku $abcd$, obr. 4.5. Protože na prvek nepůsobí normálové napětí, potom prvek podél stran se nemění. Z obrázku je patrné, že diagonála ac ve směru x' se prodlužuje a diagonála db ve směru y' se zkracuje. Potom čtverec se mění na kosočtverec.



Obr. 4.5 – Rovinný případ smyku na elementárním prvku



Obr. 4.6 – Deformace elementárního prvku

Tedy deformace vznikající od prostého smyku je charakterizovaná změnou úhlů. Lepší představu o deformaci prvku lze získat, když jednu ze stran prvku

uchytíme neposuvně, viz obr. 4.6. Malý úhel $\gamma = \angle bab_1$, o který je změněn původní pravý úhel je nazýván úhlem smyku neboli relativním smykem. Platí vztah

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta dx}{dy}. \quad (4.2)$$

Pro malý úhel γ lze zapsat $\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma$. Potom

$$\gamma = \frac{\Delta dx}{dy}. \quad (4.3)$$

Pro úplnost uvedeme znění Hookova zákona ve smyku

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \text{ nebo } \tau = G\gamma, \quad (4.4)$$



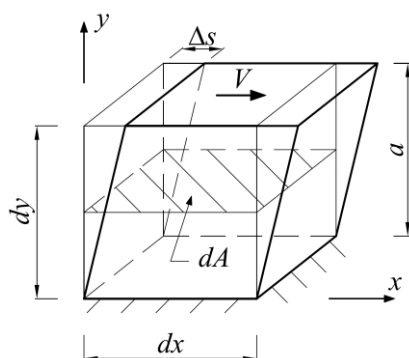
kde G je modul pružnosti ve smyku.

V případě izotropního materiálu je materiál popsán dvěma konstantami E , ν , potom třetí materiálová konstanta G musí být kombinací těchto konstant. Na základě obecných vztahů mezi napětím a deformacemi, z geometrických vztahů, lze nalézt tuto závislost

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.5)$$



Dále uveďme vztah pro přemístění strany vzhledem k protilehlé od působení prostého smyku. Označme plochu stěny dA a výslednici smykové síly $dV = \tau dA$ a vzdálenost mezi uvedenými stranami dy , potom platí



$$\Delta dx = \gamma dy = \frac{\tau}{G} dy = \frac{dV dy}{G dA}. \quad (4.6)$$

Pro prvek konečných rozměrů, viz obr. 4.7, můžeme zapsat vztah

$$\Delta s = \frac{Va}{GA}, \quad (4.7)$$



nazývaný Hookův zákon pro absolutní smyk.

Obr. 4.7 – Smykové deformace na prvku konečných rozměrů

4.3 Poznámka k dimenzování šroubových a nýťových spojů

Podle počtu rovin, ve kterých je dřík šroubu (nýtu) namáhaný smykem se rozlišují spoje:

- a) jednostřižné,
- b) dvojstřižné,

c) víceštížné.

Návrh a posouzení šroubu

1. únosnost šroubu

Při výpočtech se předpokládá, že všechny šrouby se podílejí stejnou měrou na přenosu vnější působící síly F . Potom smyková síla V_{1b} připadající na průřezovou plochu jednoho šroubu je

$$V_{1b} = \frac{F}{nk}, \quad (4.8)$$

kde k je počet šroubů a n je počet smykových rovin jednoho šroubu. Smykové napětí v dřiku šroubu o průměru D_b je rovno



$$\tau_b = \frac{V_{1b}}{A_b} = \frac{4F}{nk\pi D_b^2}. \quad (4.9)$$

Je-li známa pevnost šroubu ve smyku τ_n , potom únosnost jednoho šroubu na smykovou sílu $V_{d,b}$ lze určit ze vztahu

$$V_{d,b} = nA_b\tau_n. \quad (4.10)$$

2. posouzení na otlačení

Síly působící na dřík šroubu se přenášejí tlakem na stěny otvoru a opačně. Protože pevnost materiálu šroubu je vždy uvažována vyšší než spojovaného materiálu, je nutno posoudit tento materiál na otlačení. Pod otlačením se představujeme plastickou deformaci v místech kontaktu. Při výpočtech se nerovnoměrné rozdělení namáhání na otlačení nahrazuje rovnoměrným normálovým napětím působícím na náhradní ploše $A_o = D_o t$, kde D_o je průměr válcové oblasti kontaktu (lze uvažovat $D_o = D_b$) a t je tloušťka plechu. Potom vztah pro výpočet napětí na otlačení má tvar



$$\sigma_{otl} = \frac{F}{kD_b \sum t_i}, \quad (4.11)$$

kde $\sum t_i$ je součet tlouštěk plechů (spojovacích materiálů), které jsou otláčovány v jednom směru.

3. posouzení na tah v místě oslabeného průřezu

Normálové napětí ve spojovacích prvcích se určuje v řezu, v místě oslabení otvory pro šrouby. Toto napětí se určí ze vztahu



$$\sigma_{osl} = \frac{F}{A_{osl}} = \frac{F}{t(b - mD_b)}, \quad (4.13)$$

kde m je počet šroubových otvorů v řadě. Únosnost prvku v místě oslabení otvory je

$$N_u = \sigma_{osl} \cdot A_{osl} = \sigma_{osl} \cdot t(b - mD_b). \quad (4.14)$$

V případě svarů se opět provádí posouzení na střih. Určuje se smyková plocha a tímto odpovídající únosnost spoje.

4.4 Kontrolní otázky



1. Jakých hodnot dosahují normálová napětí při prostém smyku ?
2. Jaké je rozdělení smykových napětí na obdélníkovém průřezu při namáhání prostým smykem ?
3. Vysvětlete jaký je vztah mezi modulem pružnosti v tahu a ve smyku ?

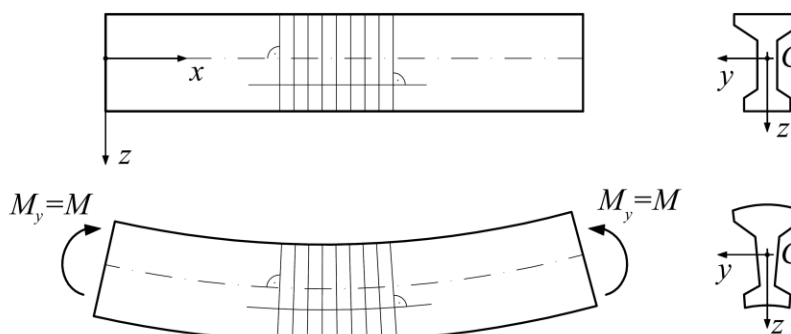
5 Ohyb nosníků

5.1 Napětí v ohýbaných nosnících

5.1.1 Normálová napětí při ohybu



Je-li prut příčně zatížen vznikají v něm ohybové momenty a obvykle také posouvající síly. Současně dochází také k jeho ohybu. Střednice prutu se kříví a má při rovinném ohybu tvar rovinné křivky. Při prostorovém ohybu tvar prostorové křivky. Takovýto prut je velmi často nazýván ohýbaným nosníkem, zkráceně nosníkem.

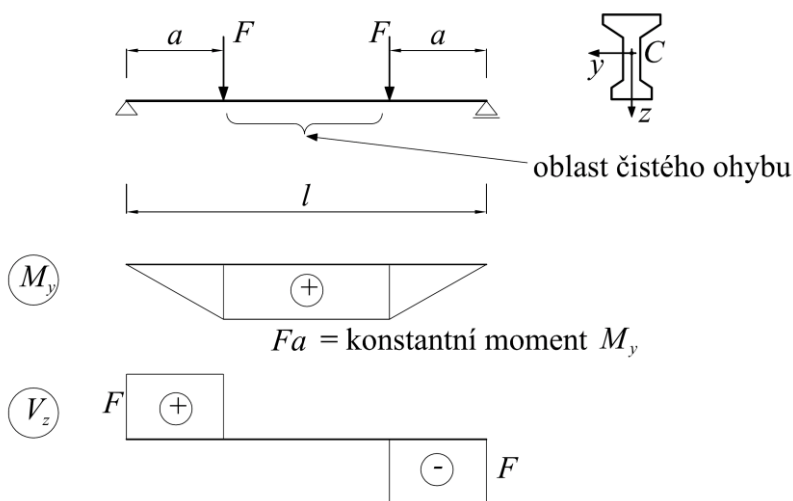


Obr. 5.1 – Rovinnost průřezu při prostém ohybu

V dalším textu je pozornost soustředěna na rovinný ohyb. V případě rovinného ohybu působící zatížení včetně reakcí leží v jedné z hlavních rovin prutu tj. rovin, které jsou určeny centrálními osami průřezu a osou prutu nebo jsou k ní symetrické. Pro rovinný případ ohybu v rovině xz platí

$$N = V_y = 0 \text{ a } M_x = M_z = 0. \quad (5.1)$$

Ještě jednodušší případ je představuje prostý (čistý) ohyb, kdy posouvající síly $V_z = 0$, a jedinou složkou působící v průřezu je ohybový moment M_y , viz obr. 5.2, kde je vyznačena oblast prostého (čistého) ohybu.



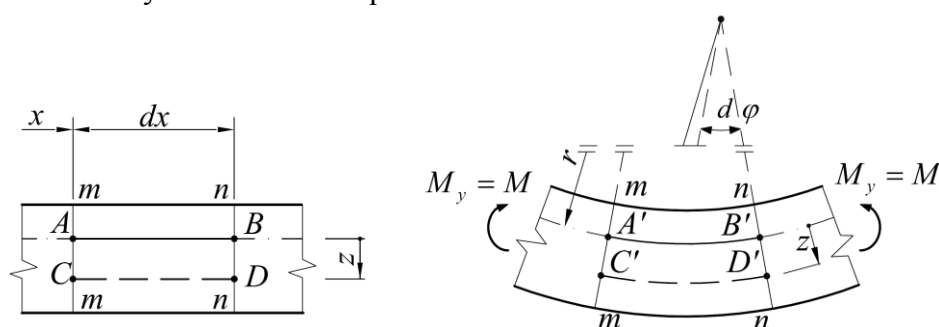
Obr. 5.2 – Ohýbaný nosník s oblastí prostého (čistého) ohybu

Při odvození rovnic pro výpočet normálového napětí σ_x v průřezu předpokládáme že v průřezích nosníku působí pouze ohybový moment M_y a dále podobně jako u osového namáhání vycházíme ze dvou základních předpokladů:

1. průřezy prutu rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají rovinnými kolmými i po deformaci (Bernoulliho hypotéza)
2. že podélná „vlákna“ na sebe vzájemně „netlačí“.

Na základě předpokladu, že podélná „vlákna“ na sebe vzájemně „netlačí“ je možné definovat, že normálové napětí σ_y a σ_z tj. napětí v rovinách kolmých k prutu se rovnají nule.

Na základě prvního předpokladu je zřejmé, že v případě prostého ohybu příčné rovinné průřezy se pootáčí a zůstávají kolmé k ohnuté ose nosníku. Měříme-li vzdálenosti mezi dvěma analogickými body libovolných průřezů na obrysu prutu, je zřejmé, že tyto vzdálenosti se při zatěžování mění, viz obr. 5.3. Horní vlákna se zkracují a spodní protahují. Lze najít vlákna, jejichž délka se při ohybu nemění. Skupina těchto vláken se nazývá neutrální vrstvou. Vlákná v této vrstvě před deformací leží v jedné rovině a po deformaci vytváří válcovou plochu. Přesto každý průřez je protínán neutrální vrstvou po přímce. Tato přímka se nazývá neutrální osa průřezu.



Obr. 5.3 – Ohyb nosníku

V případě rovinného ohybu neutrální osa je kolmá k rovině zatížení. Pro další odvození předpokládáme, že neutrální osa je ztotožněna s osou y . Uvažujeme elementární prvek o délce dx ohraničený příčnými řezy $m-m$ a $n-n$, viz obr. 5.3. Na základě hypotézy o rovinnosti průřezů se po deformaci průřezy pootočí o úhel $d\varphi$. Úsečka AB neutrální vrstvy se zkříví ve tvaru části kružnice $A'B'$ o poloměru r . Přímé vlákno CD ve vzdálenosti z od neutrální vrstvy se mění v zakřivené $C'D'$ s poloměrem křivosti $r+z$. Relativní prodloužení tohoto vlákna

$$\varepsilon_x = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{(r+z)d\varphi - dx}{dx} = \frac{z}{r}. \quad (5.2)$$

Délka vláken neutrální vrstvy před deformací a po deformaci od působení ohybového momentu se nemění. Takže úsečka $AB = dx$ je stejně dlouhá jako část kružnice $A'B' = rd\varphi$. Tedy

$$dx = rd\varphi \quad (5.3)$$

Po dosazení do rovnice (5.2) obdržíme důležitý vztah

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r}. \quad (5.4)$$



Z uvedeného vztahu je patrné, že podélná deformace je proporcionální vzdálenosti vlákna od neutrální osy, nebo jinak poměrná protažení probíhají lineárně po výšce průřezu.

Abychom odtud odvodili rozložení napětí, použijeme pro lineárně pružný materiál Hookův zákon. Dříve bylo definováno, že $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Zbývající normálové napětí

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{z}{r}. \quad (5.5)$$

V této rovnici neznáme poloměr křivosti r . Využijeme nyní statické podmínky ekvivalence vnitřních sil v průřezu a to ty, které obsahují normálové napětí, (2.16) až (2.18). Za zmíněné napětí dosadíme vztah (5.5). Potom

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{r} \int_A z dA = \frac{E}{r} U_y = 0, \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{r} \int_A z^2 dA = \frac{E}{r} I_y, \\ M_z &= -\int_A \sigma_x y dA = -\frac{E}{r} \int_A yz dA = -\frac{E}{r} I_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

V první rovnici U_y představuje statický moment průřezové plochy k ose y . Ten je roven nule, neboť osa y prochází těžištěm. Osa y je současně neutrální osou průřezu, na které $\sigma_x = 0$.

Třetí rovnice je rovněž splněna, neboť deviační moment I_{yz} je roven nule, protože osy y a z jsou hlavními centrálními osami průřezu.

Ze druhé rovnice, získáme hledaný vztah mezi poloměrem křivosti a ohybovým momentem ve tvaru



$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y}. \quad (5.7)$$

Po dosazení vztahu pro výpočet poloměru křivosti r do vztahu (5.5) pro výpočet normálového napětí σ_x se získáme konečný vztah pro výpočet normálového napětí ve tvaru



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.8)$$

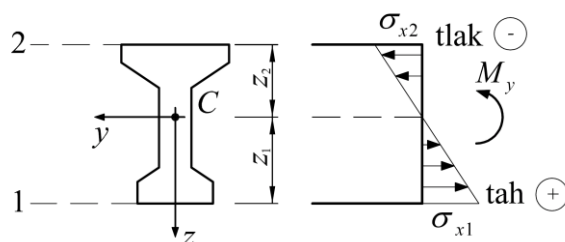
Z této rovnice vyplývá, že průběh normálového napětí po výšce průřezu je lineární a extrémní hodnoty vznikají ve vláknech nejvíce vzdálených od střednice prutu. Ze srovnání rovnice (5.8) a rovnice (5.5) vyplývá, že průběh poměrných délkových deformací ε_x po výšce průřezu kopíruje průběh napětí σ_x dělený modulem pružnosti E .

Zcela analogickým postupem jaký byl užit při odvození vztahů pro ohyb v rovině xz lze získat vztah pro výpočet napětí od ohybu v rovině xy .



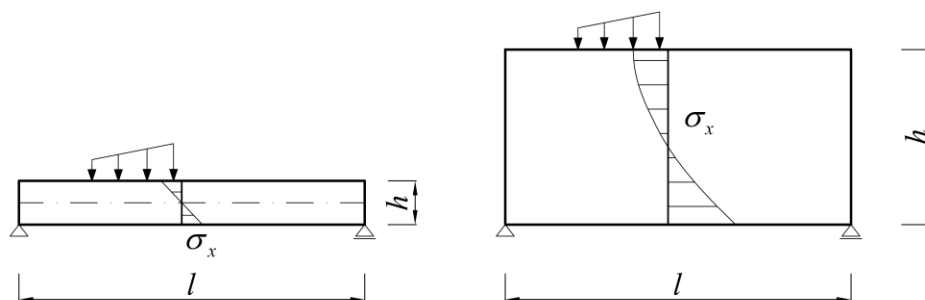
$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y. \quad (5.9)$$

Záporné znaménko odpovídá znaménkové konvenci podle obr. 5.4. Účinek kladného momentu M_z vyvolává v prvním polorovině průřezu (při $y > 0$) tlakové napětí.



Obr. 5.4 – Ohyb nosníku a průběhy napětí

Uvedený vztah (5.8) (5.9) lze uplatnit v případě ohýbaných prutů, kdy mimo ohybového momentu působí i posouvající síla. Přesto, že uvedené vztahy se stávají přibližnými chyba ve výpočtu napětí a deformací u štíhlých prutů ($l > 5h$) není velká. U krátkých prutů chyba může být značná a u prvků vysokých tvarem blízcích se stěně jsou uvedené vztahy nepoužitelné, viz obr.5.5.



Obr. 5.5 – Průběh napětí v průřezu nosníku a stěny

5.1.2 Návrh a posouzení ohýbaného nosníku

Posuzujeme-li prut ohýbaný v rovině xz vycházíme z rovnice (5.8) nebo v rovině xy z rovnice (5.9). Extrémní napětí vznikají v krajních bodech průřezu a při ohybu v rovině xz jsou rovna

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} z_1, \quad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} z_2, \quad (5.10)$$



kde z_1 z_2 jsou souřadnice krajních bodů průřezu od těžištní osy y nebo také od neutrální osy. Uvedené vztahy lze použít pro posouzení napětí v prutech od ohybu srovnáním s mezním (připustným) napětím.

Při návrhu použití vztahu (5.9) se jeví problematické, neboť v tomto vztahu vystupují dvě neznámé proměnné I_y a z . Aby návrh byl jednodušší zavádí se veličina, kterou nazýváme průřezový modul a označujeme W . Průřezový modul je vyjádřen jako poměr momentu setrvačnosti ke vzdálenosti od neutrální osy do krajních vláken. Vzhledem k rovnicím (5.10)

$$W_{y1} = \frac{I_y}{z_1}, \quad W_{y2} = \frac{I_y}{z_2} \quad (5.11)$$



Tedy



$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}}, \quad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{W_{y2}}. \quad (5.12)$$

Rozměr průřezového modulu je L^3 a u obecného průřezu rozlišujeme dva průřezové moduly ke každé hlavní ose, vzorec (5.11). Pokud je však průřez symetrický jsou průřezové moduly k oběma krajním vláknům shodné a není je třeba odlišovat indexy.

Pro obdélníkový průřez výšky h a šířky b má moment setrvačnosti k ose y

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3. \text{ Vzdálenost do krajních vláken ve svislém směru je } z_1 = z_2 = \frac{h}{2}.$$

Potom průřezový modul k ose y

$$W_{y1} = W_{y2} = W_y = \frac{1}{6}bh^2. \quad (5.13)$$

Pro druhý směr, ohyb kolem osy z

$$W_{z1} = W_{z2} = W_z = \frac{1}{6}hb^2. \quad (5.13)$$

Pro plný kruhový průřez o průměru d získáme stejným postupem. Momenty setrvačnosti $I_y = I_z = \frac{\pi}{64}d^4$, vzdálenosti do krajních vláken $z_1 = z_2 = \frac{d}{2}$, potom

$$W_y = W_z = \frac{\pi}{32}d^3. \quad (5.14)$$

Vztahy pro výpočet průřezových modulů jiných průřezů se dají odvodit analogicky. Číselné hodnoty průřezových modulů jsou tabelovány stejným způsobem jako momenty setrvačnosti.

Tvar průřezu				
Průřezové moduly W_y, W_z	$W_y = \frac{1}{6}bh^2$ $W_z = \frac{1}{6}hb^2$	$W_y = W_z = \frac{\pi}{32}d^3$	$W_y = W_z = \frac{\pi}{32} \cdot [d^4 - (d-t)^4]$	$W_y = \frac{1}{6h} [bh^3 - (b-t_w)(h-2t_f)^3]$ $W_z = \frac{1}{6h} [2t_fb^3 + (h-2t_f)t_w^3]$

Tab. 5.1 – Průřezové moduly jednoduchých obrazců

Dimenzování prutu namáhaného prostým ohybem

Posouzení prutu namáhaného prostým ohybem v pružném oboru spočívá v porovnání vypočtených napětí s výpočtovými hodnotami pevnosti (R_d) popř. vypočtených ohybových momentů s ohybovými momenty na mezi únosnosti.

Nejprve vyčíslíme průřezový modul ze vztahů (5.12). U homogenních průřezů rozhoduje vždy menší průřezový modul k uvažované ose

$$W_y = \min(W_{y1}, W_{y2}). \quad (5.15)$$

Podle velikosti průřezového modulu dohledáme nebo vypočteme geometrické rozměry průřezu. Je-li třeba tyto veličiny upravíme a zpětně dohledáme nebo vyčíslíme potřebné průřezové charakteristiky a provedeme posouzení podle obecných vztahů (5.8) a (5.9) nebo praktičtěji podle vztahů (5.12) s doplněním, že

$$\sigma_x \leq f_d \quad (5.16)$$

nebo

$$M_y \leq M_{y,d} \quad (5.17)$$

kde $M_{y,d}$ je mezní moment, který je průřez prutu schopen přenést. Ve výpočtech se předpokládá, že nemůže dojít ke ztrátě stability v ohybu.

Příklad:

Navrhněte a posuďte jednotlivé průřezy nosníku. Vykreslete průběhy napětí v průřezích, dále extrémní napětí po délce nosníku. Nosník má být vyroben z oceli třídy S235. Návrhová pevnost $f_d = 204,3$ MPa. Nechť průřez A-A je tenkostěnná trubka a průřez B-B je I-profil

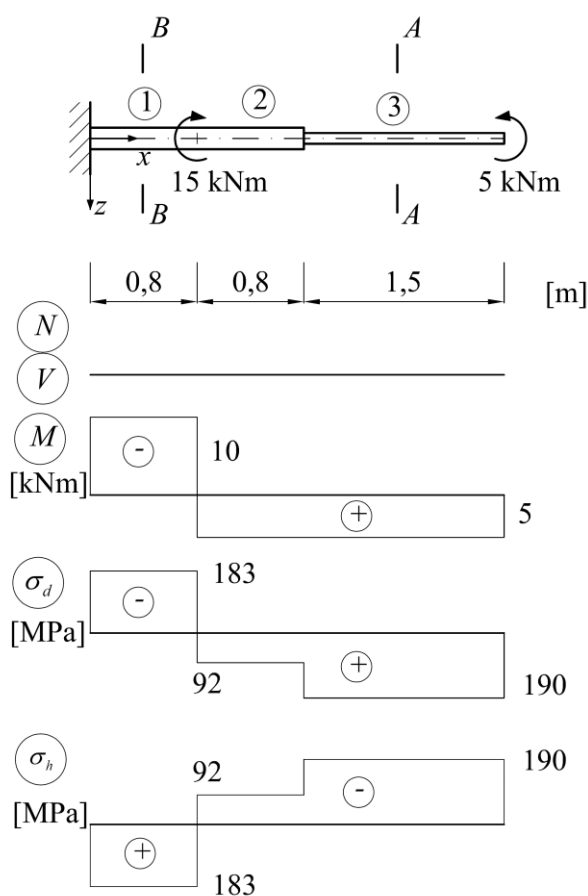
Postup řešení:

Z obr. 5.6 je patrné, že musíme uvažovat 3 úseky pro návrh a posouzení. První úsek pro x od 0 po 0,8, druhý úsek pro x od 0,8 po 1,6 a třetí úsek od 1,6 po 3,1 m.

Úsek 1:

V úseku 1 působí moment $M_y = 10$ kNm, řez B-B (tažena horní vlákna)

I-profil symetrie k ose y , z (těžiště je v ose průřezu)



Obr. 5.6 - Geometrie konstrukce, průběhy vnitřních sil a napětí

$$\sigma'_x = \left| \frac{M_y}{W_d} \right| \leq f_d, \text{ a } \sigma''_x = \left| \frac{M_y}{W_h} \right| \leq f_d \text{ průřez je symetrický, potom}$$

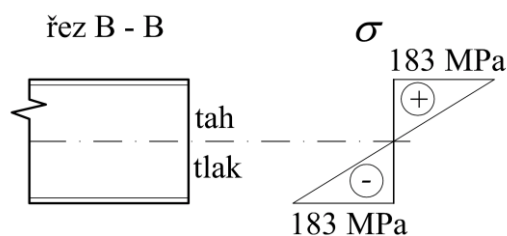
$$W_{d,h} \geq \left| \frac{M_y}{f_d} \right| = \frac{10 \cdot 10^3}{204,3 \cdot 10^6} = 4,894 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 48,94 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Dle Technického průvodce 51, str. 224 – 225 (I ČSN 42 5550) $W_{d,k} = W_y = 48,94 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow$ profil I120, $W_y = 54,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$, $I_y = 3,27 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

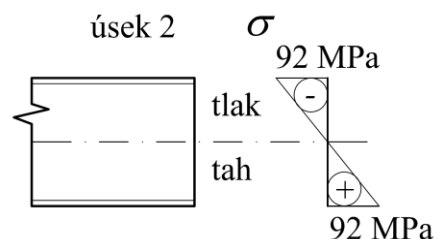
$$\sigma_x = \frac{-10 \cdot 10^3}{3,27 \cdot 10^{-6}} \cdot z,$$

$$\sigma'_x = \frac{-1 \cdot 10^4}{3,27 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,06 = -183 \cdot 10^6 \text{ Pa} < 204,3 \text{ MPa},$$

$$\sigma''_x = \frac{-1 \cdot 10^4}{3,27 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,06) = 183 \cdot 10^6 \text{ Pa} < 204,3 \text{ MPa}.$$



Obr. 5.7 - Průběh napětí po výšce průřezu I120 v úseku 1



Obr. 5.8 - Průběh napětí po výšce průřezu I120 v úseku 2

Úsek 2:

$M_y = 5 \text{ kNm}$, (tažena dolní vlákna)

I-profil symetrie k ose y, z (těžiště je v ose průřezu)

$$\sigma'_x = \frac{+5 \cdot 10^4}{3,27 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,06 = +91,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 92 \text{ MPa} < 204,3 \text{ MPa},$$

$$\sigma''_x = \frac{+5 \cdot 10^4}{3,27 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,06) = -91,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -92 \text{ MPa} < 204,3 \text{ MPa},$$

Úsek 3:

$M_y = 5 \text{ kNm}$, řez $A-A$, (tažena dolní vlákna)

$$\sigma'_x = \left| \frac{M_y}{W_d} \right| \leq f_y, \text{ a } \sigma''_x = \left| \frac{M_y}{W_h} \right| \leq f_d \text{ } \varnothing \text{ profil má průřez symetrický k ose } y, z,$$

potom

$$W_{d,h} = W_y \geq \left| \frac{M_y}{R_d} \right| = \frac{5 \cdot 10^3}{204,3 \cdot 10^6} = 2,45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 2,45 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

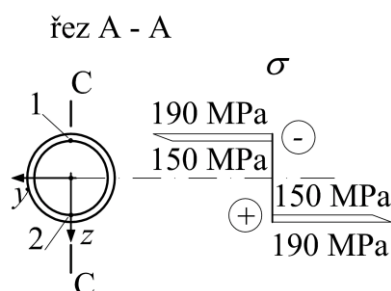
Dle Technického průvodce 51, str. 251 – 258, nejbližší je trubka $\varnothing 76/8$,

$$W = 26,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, I_y = 1000 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

$$\text{horní vlákna } \sigma'_x = \frac{+5 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^{-9}} \cdot 0,038 = 190 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 190 \text{ MPa} < 204,3 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \text{dolní vlákna } \sigma''_x &= \frac{+5 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^{-9}} \cdot (-0,038) = -190 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \\ &= |-190| \text{ MPa} < 204,3 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\text{Napětí v bodech 1, 2 (obr. 5.9)} \quad {}^{1,2}\sigma_x = \pm \frac{5 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^{-9}} \cdot (-0,030) = \mp 150 \text{ MPa}.$$



Obr. 5.9 - Průběh napětí ve svislém řezu po výšce průřezu trubky v oblasti 3

Na obr. 5.6 je dále zobrazeno normálové napětí v dolních a horních vláknech podél celé konzoly.



5.1.3 Smyková napětí při ohybu – masivní průřez

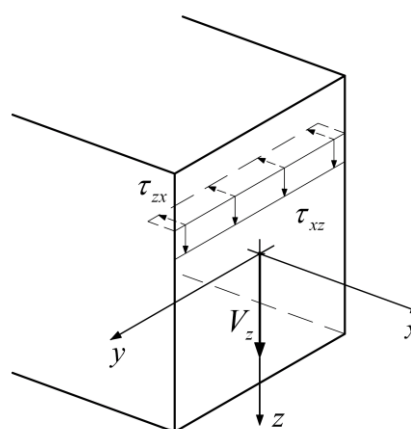
V praktických případech není nosník namáhán pouze prostým ohybem, ale v příčných průřezích posouvajícími silami. V důsledku účinků posouvajících sil vznikají smyková napětí. Velikost smykových napětí nelze odvodit z Bernoulliho hypotézy o rovinnosti průřezů, protože tento předpoklad vylučuje smykové deformace a z Hookeova zákona ve smyku rov. (4.4). Z tohoto důvodu se při odvozování smykových napětí při ohybu vychází z podmínky rovnováhy a z věty o vzájemnosti smykových napětí (smyková napětí ve vodorovném a svislém řezu jsou totožná), viz obr. 5.10.



Nosník konstantního průřezu

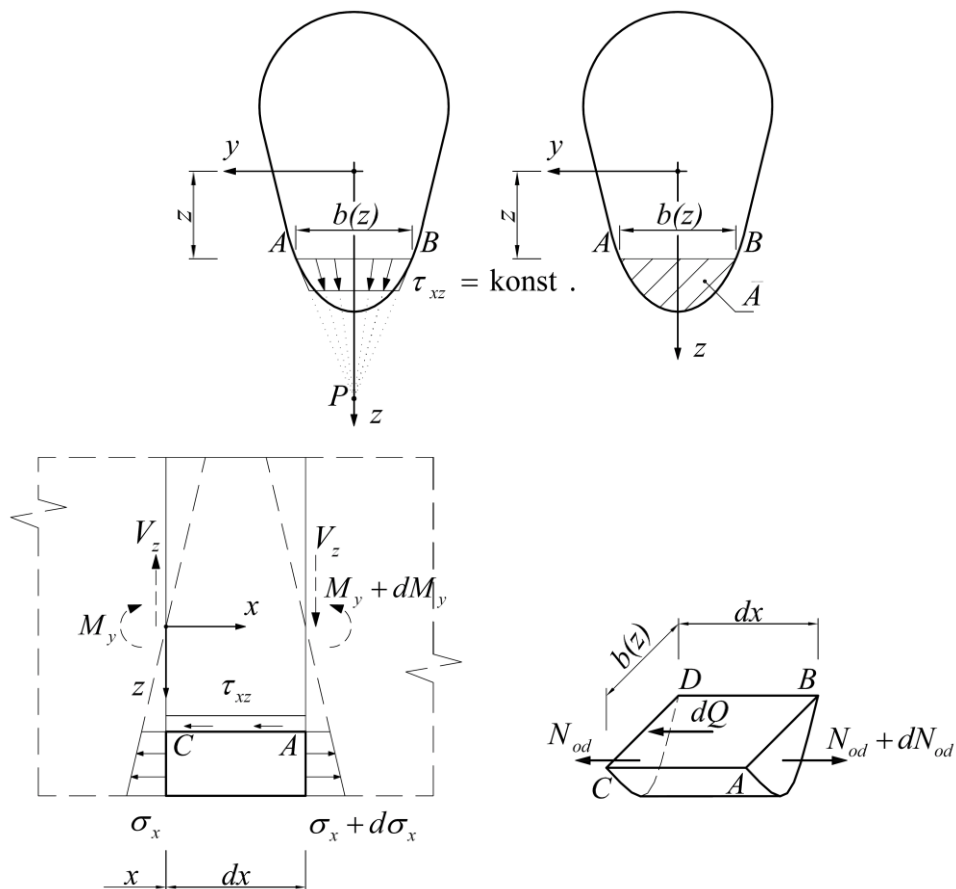
Je uvažován nosník stálého průřezu, který je symetrický podle roviny xz . Základní přibližné předpoklady, ze kterých se při výpočtu vychází formuloval Grashof:

- podél rovnoběžky s neutrální osou (podél přímky $z = \text{konst.}$) je svislá složka smykového napětí konstantní; $\tau_{xz} = \text{konst.}$
- vektory výsledných smykových napětí podél této přímky vždy směřují do společného bodu P – průsečíku tečen k obrysu průřezu.



Obr. 5.10 – Vzájemnost složek smykových napětí τ_{xz} a τ_{zx} .

Smyková napětí na okraji průřezu musí mít směr tečny k obrysu při jakémkoli namáhání prutu, za předpokladu nezatížení povrchu tangenciálním zatížením.



Obr. 5.11 – K odvození smykových napětí v masivních průřezech

Oba zavedené předpoklady jsou znázorněny na obr. 5.11. Sledujme nyní elementární úsek nosníku o délce dx . Ohybový moment v pravém průřezu je obecně odlišný od momentu v levém řezu, takže jím vyvolaná normálová napětí σ_x , jejichž lineární průběh po výšce se řídí rovnicí 5.9, jsou rovněž různá v obou řezech vzdálených navzájem o dx . Uvolníme-li nyní z myšleného elementu nosníku jeho spodní část omezenou rovinou $z = \text{konst.}$, pak výslednice normálových napětí na obou protilehlých ploškách budou rovněž rozdílné: v průřezu x je to N_{od} , v souběžném průřezu $x+dx$ pak $N_{od} + dN_{od}$, viz. obr. 5.11. Označíme-li jako A část plochy pod úsečkou AB (tj. přímkou $z = \text{konst.}$), pak integrací napětí σ_x , daných vztahem (5.9) po této ploše dostáváme sílu N_{od} a její diferenciál dN_{od} ve tvaru

$$N_{od} = \int_{A_{od}} \sigma_x dA = \sigma_x \int_{A_{od}} dA = \frac{M_y}{I_y} \int_{A_{od}} z dA = \frac{M_y}{I_y} U_{od,y}, \quad (5.18)$$

$$dN_{od} = \frac{dN_{od}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{I_y} U_{od,y} \right) dx = \frac{dM_y}{dx} \frac{U_{od,y}}{I_y} dx = V_z \frac{U_{od,y}}{I_y} dx. \quad (5.19)$$

Zde znamená $U_{od,y}$ statický moment oddělené části průřezu k ose y . Protože je průřez nosníku konstantní, uplatnila se derivace jen u ohybového momentu M_y a podle Schwedlerovy věty vede na posouvající sílu V_z .

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z. \quad (5.20)$$

Na vodorovné ploše $ABDC$ vytknuté vodorovným řezem o souřadnici z působí rovnoměrně rozdělená smyková napětí τ_{zx} , jejichž výslednice je

$$dQ = \tau_{zx} b(z) dx. \quad (5.21)$$

Z podmínky rovnováhy oddělené části ve směru x

$$-dQ - N_{od} + (N_{od} + dN_{od}) = 0. \quad (5.22)$$

Spojením rovnic (5.19) a (5.21) získáme

$$dQ = \tau_{zx} b(z) dx = dN = V_z \frac{U_y}{I_y} dx. \quad (5.23)$$

Smykového napětí $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z U_y}{I_y b(z)}, \quad (5.24)$$

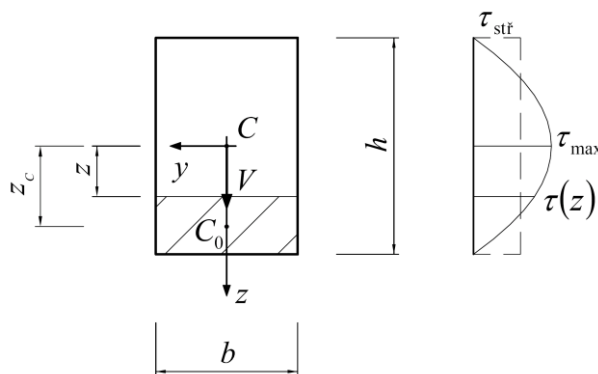


kde V_z je posouvající síla, U_y je statický moment „oddělené“ části průřezu k těžišti celého průřezu, I_y je moment setrvačnosti celého průřezu a $b(z)$ šířka průřezu v uvažovaném místě.

Pro ilustraci je zde uvedeno odvození funkce popisující rozdělení smykového napětí po výšce obdélníkového průřezu s rozměry b a h . V průřezu působí smyková síla V_z , viz obr. 5.12.

Hledanou funkci smykového napětí získáme ze vztahu (5.24). Kde statický moment odříznuté plochy U_y v závislosti na souřadnici z určíme ze vztahu

$$U_y = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(\frac{h}{2} + z \right) \frac{1}{2} = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2). \quad (5.25)$$



Obr. 5.12 – Maximální smykové napětí u obdélníkového průřezu

Moment setrvačnosti obdélníku k jeho těžištní ose y $I_y = \frac{1}{12} b h^3$.

Po dosazení výše uvedených vztahů do rovnice (5.24) obdržíme

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2)}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{\underbrace{bh}_A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (5.26)$$

Smykové napětí probíhá po výšce podle kvadratické paraboly. Na horním i spodním okraji pro $z = h/2$ smykové napětí je nulové. Maximální hodnotu má v úrovni neutrální osy, osy y



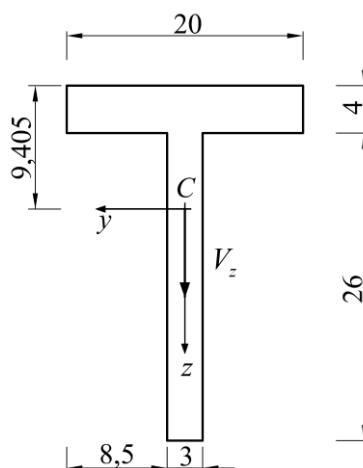
$$\tau_{xz, \max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}. \quad (5.27)$$

Z výše odvozeného vztahu vyplývá, že smykové napětí odvozené na základě výše uvedených předpokladů převyšuje v maximální hodnotě o 50% napětí při prostém smyku.



Příklad:

Určete průběh smykových napětí ve stojině a pásnici symetrického průřezu T, viz obr. 5.13. V průřezu působí síla příčná síla V_z o velikosti 1 kN.



Obr. 5.13 – K příkladu T průřez zatížený silou V

Postup řešení:

Nejprve vyčíslíme obvyklým způsobem moment setrvačnosti k ose y T průřezu. $I_y = 6012,5 \text{ mm}^4$.

Dále zvolme pro výpočet a vykreslení průběhu smykových napětí následující významné body. Rozdělení smykových napětí po výšce obdélníkového průřezu jak bylo ukázáno výše je parabola. Průřez se skládá ze dvou obdélníků, proto volíme body 1 až 5 na stojině a dále 6 a 7 na pásnici, viz. obr. 5.14.

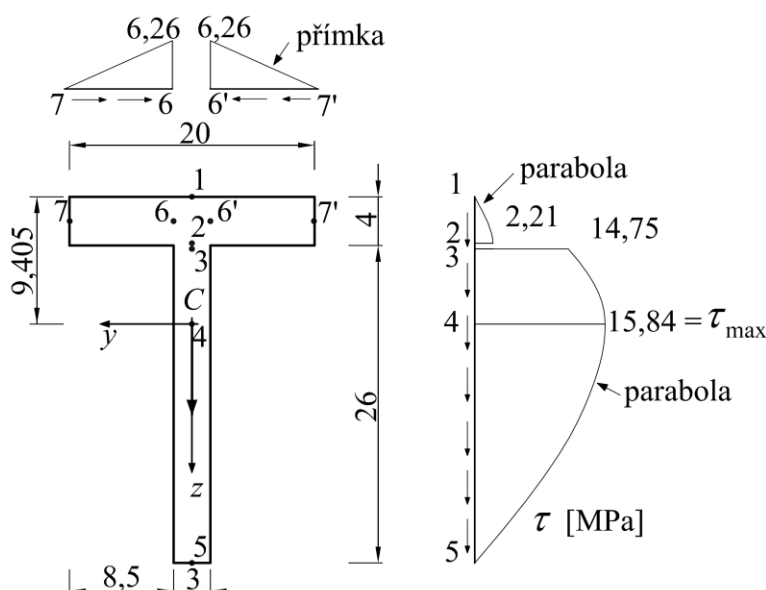
Výpočet provádíme pro jednotlivé úrovně (řezy) vztahující se k jednotlivým bodům.

1) Úroveň horního okraje pásnice - bod 1

Napětí $^1 \tau_{xz} = 0$, protože $U_y = 0$.

2) Úroveň dolního okraje pásnice - bod 2

$$\text{Napětí } ^2 \tau_{xz} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 20 \cdot (9,405 - 2) \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 13386,7 \cdot 10^{-12}} = 2,21 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2,21 \text{ MPa}.$$



Obr. 5.14 – Průběh smykových napětí na T průřezu

3) Úroveň odpovídá řezu stojiny těsně pod dolním okrajem pásnice - bod 3

$$\text{Napětí } {}^3\tau_{xz} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 20 \cdot (9,405 - 2) \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 13386,7 \cdot 10^{-12}} = 14,75 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 14,75 \text{ MPa}.$$

Výpočet velikosti smykového napětí v těžišti T průřezu:

4) Úroveň odpovídá řezu stojinou v úrovni těžiště průřezu - bod 4

$$\begin{aligned} \text{Napětí } {}^4\tau_{xz} &= \frac{1 \cdot 10^3 \cdot \left(4 \cdot 20 \cdot (9,405 - 2) + (9,405 - 4) \cdot 3 \cdot \frac{9,405 - 4}{2} \right) \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 13386,7 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 15,86 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 15,84 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

nebo z druhé strany

$$\text{Napětí } {}^4\tau_{xz} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot (30 - 9,405)^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 13386,7 \cdot 10^{-12}} = 15,84 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 15,84 \text{ MPa}.$$

5) Úroveň dolního okraje profilu - bod 5

Napětí ${}^5\tau_{xz} = 0$, protože $U_y = 0$.

6) Svislý řez pásnicí v místě před stykem se stojinou - bod 6 a 6'

$${}^6\tau_{xz} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 8,5 \cdot 4 \cdot (9,405 - 2) \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 13386,7 \cdot 10^{-12}} = 6,26 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 6,26 \text{ MPa}.$$

Výpočet velikosti smykového napětí na okraji pásnice na její ose:

7) Svislé okraje pásnice - bod 7 a 7'

Napětí ${}^6\tau_{xz} = 0$, protože $U_y = 0$.

Průběh smykových napětí na pásnici i stojině zadaného T profilu je vykreslen na obr. 5.14.



5.1.4 Smyková napětí při ohybu v tenkostěnných nosnících



Tenkostěnné nazýváme nosníky (pruty) tehdy, je-li tloušťka t jednotlivých částí – např. stojiny t_w nebo pásnice t_f – značně menší než rozměry průřezu jako celku (obr. 5.15). Často se uvádí poměr 1:10, přijatelné výsledky však získáme i při méně výrazných poměrech. Rozeznáváme pak pruty otevřeného průřezu, jejichž střednice (čára půlící tloušťku) netvoří uzavřenou křivku – např. tvaru U, I, T, C, Z apod. a uzavřeného průřezu - O, □ apod.

V dalším výkladu se zaměříme především na nosníky s otevřeným průřezem.

A. Smyková napětí v tenkostěnných nosnících otevřeného průřezu

Budeme vycházet ze základních předpokladů:

- Smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dílčí stěně.
- Smyková napětí jsou rovnoběžná s obrysem průřezu.

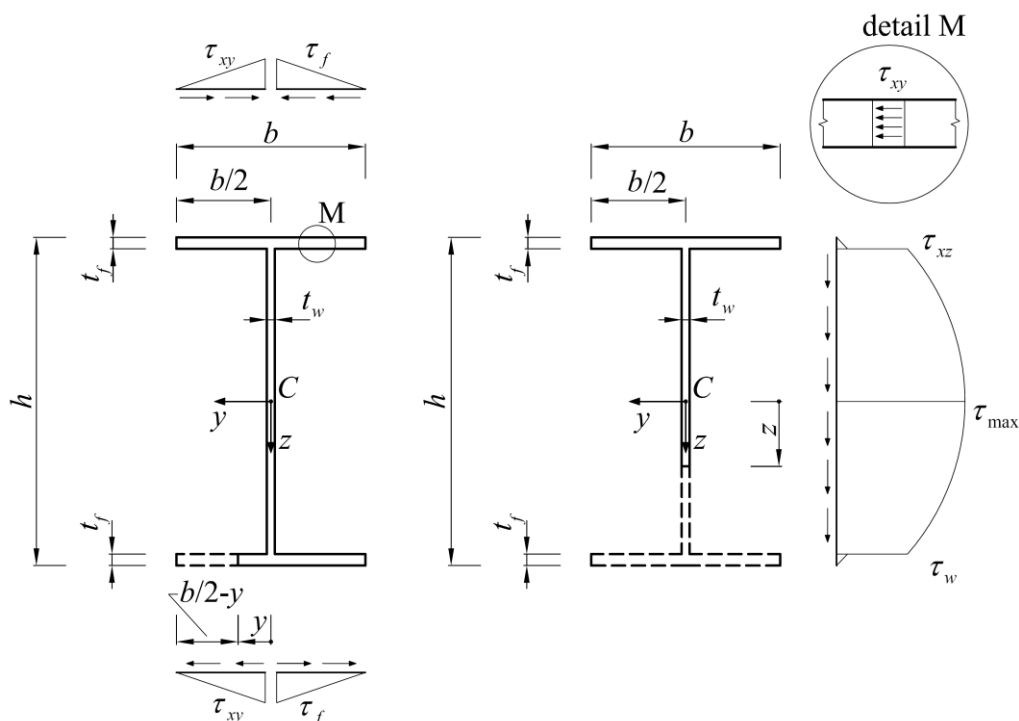
Základní vzorec (5.24) prepíšeme takto:



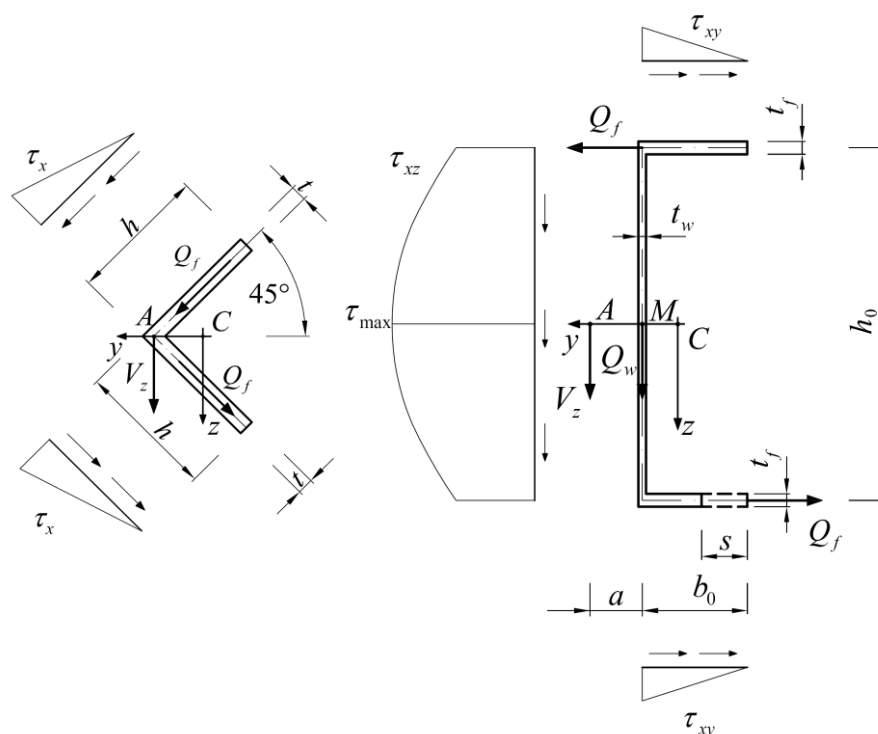
$$\tau_x = \frac{V_z U_{od,z}}{I_y t}, \quad (5.28)$$

kde t je tloušťka ve vyšetřovaném místě, $U_{od,y}$ je statický moment plochy oddělené řezem kolmým na obrys průřezu. Označení τ_x napovídá, že jde o výsledné napětí v rovině kolmo k ose x (na svislých částech je to τ_{xz} , na vodorovných τ_{xy}).

Průběh smykových napětí v tenkostěnných otevřených profilech tvarů I, L a U je zobrazen na obr. 5.15 a 5.16.

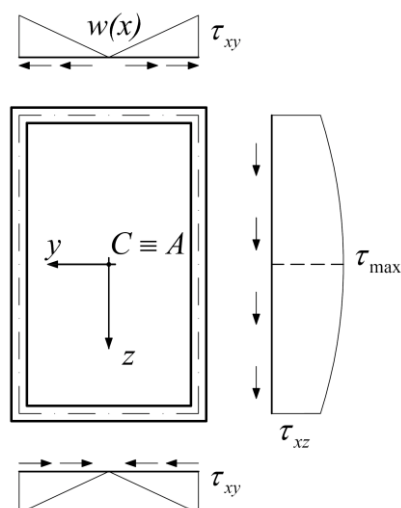


Obr. 5.15 – Smykové napětí ve stojině a přírubách I profilu

Obr. 5.16 - Smykové napětí v L a U profilu a střed smyku A

B. Smyková napětí v tenkostěnných nosnících uzavřeného průřezu

U tenkostěnných nosníků uzavřeného průřezu je úloha určení smykového napětí staticky neurčitá. K výpočtu je nutné definovat deformační podmínky. Výjimkou jsou jednodomůrkové nosníky s osou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí v této rovině jsou rovna nule a jejich průběh po výšce je stejný jako u průřezu otevřeného, který vznikl rozdělením uzavřeného průřezu na dvě poloviny.

Obr. 5.17 - Smykové napětí v uzavřeném profilu tvaru $\square$

Na obrázku 5.17 je vykreslen průběh smykových napětí v uzavřeném tenkostěnném $\square$ profilu. Povšimněte si podobnosti s průběhem smykových napětí v tenkostěnném otevřeném U profilu, viz. obr. 5.16.

5.1.5 Střed smyku

Z předpokladů, které byly uvedeny výše a z rovnice (5.28) se dají vyčíslit u prutů otevřeného průřezu jednoznačně smyková napětí od posouvající síly v libovolném místě. Jejich integrací podél jednotlivých stěn můžeme odvodit výsledné smykové síly Q , jež jsou staticky ekvivalentní posouvající síle V_z . Má-li průřez dvě osy symetrie, prochází výsledná síla těžištěm. Jinak tomu však je u nesymetrických průřezů, pokud rovina zatížení (budeme ji uvažovat svislou) není rovinou symetrie prutu.

Tak např. u rovnoramenného úhelníku při orientaci podle obr. 5.16 není průřez symetrický vůči ose z . Výslednice smykových sil na obou přírubách Q_f jsou shodné (a rovné $V_z/\sqrt{2}$) a protínají se v průsečíku os, tj. v bodě A , takže výsledná posouvající síla neprochází těžištěm, ale tzv. středem smyku, jímž musí proto též procházet rovina zatížení, pokud nemá být prut kroucen.

Odvození polohy středu smyku (středu ohybu) u obecného průřezu je součástí teorie kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu; v našem výkladu se omezíme jen na jednodušší průřezy s jednou osou symetrie. Délky jednotlivých stěn budeme zjednodušeně zavádět jako délky střednic, což u tenkostěnných průřezů nevede k závažným nepřesnostem.

Mějme jednoose symetrický U-profil, viz obr. 5.16. Zavedeme-li pomocnou souřadnici s jako vzdálenost od volného konce příruby, je statický moment oddělené části $U_{od,y}$ a smykové napětí pak podle rovnice (5.28)

$$U_{od,y} = t_f s \frac{h_0}{2} = \frac{1}{2} t_f h s, \quad (5.29)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_z U_{od,y}}{I_y t_f} = \frac{V_z h_0}{2 I_y} s. \quad (5.30)$$

Průběh napětí je lineární – obr. 5.16. Výsledné smykové síly na přírubách získáme integrací

$$Q_f = \int_0^{b_0} \tau_{xy} t_f ds = \frac{V_z h_0}{2 I_y} t_f \int_0^{b_0} s ds = \frac{V_z h_0}{2 I_y} t_f \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{b_0} = \frac{V_z t_f b_0^2 h_0}{4 I_y}. \quad (5.31)$$

Průběh smykových napětí na stojině odvodíme analogicky jako u tenkého obdélníkového průřezu. Při zavedeném označení vyjde

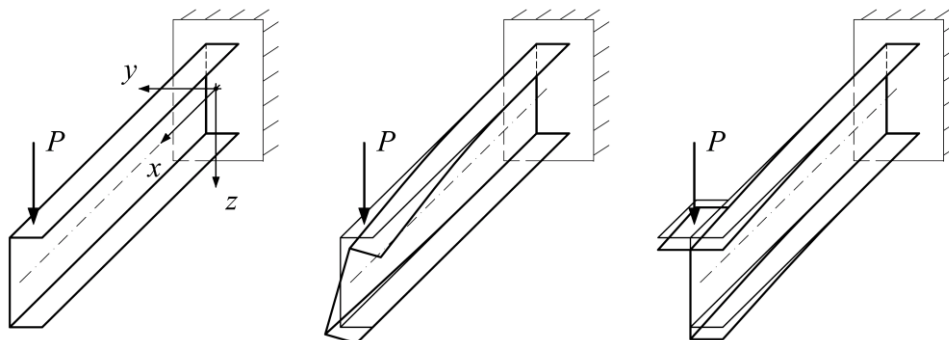
$$\tau_{xy} = \frac{V_z}{8 I_y t_w} \left[4 t_f b_0 h_0^2 + t_w (h_0 - 4 z^2) \right] \quad (5.32)$$

Jeho výslednici nemusíme odvozovat integrací, neboť jediná svislá složka musí být shodná s posouvající silou: $Q_w = V_z$.

Smykové síly na přírubách tvoří dvojici sil, jejíž momentový účinek je $Q_f \cdot h_0$. Složíme-li ji se silou $Q_w = V_z$ procházející osou stojiny obdržíme výslednou sílu V_z odsunutou od stojiny o vzdálenost

$$a = \frac{Q_f h_0}{V_z} = \frac{t_f b_0^2 h_0^2}{4 I_y}. \quad (5.33)$$

Touto vzdáleností je definována poloha středu smyku A; leží na opačné straně od stojiny než těžiště. Pokud nemá být prut kroucen, musí tedy výslednice vnějších sil procházet tímto středem smyku (středem ohybu), viz obr 5.18.



Obr. 5.18 – Střed smyku – ohyb U průřezu

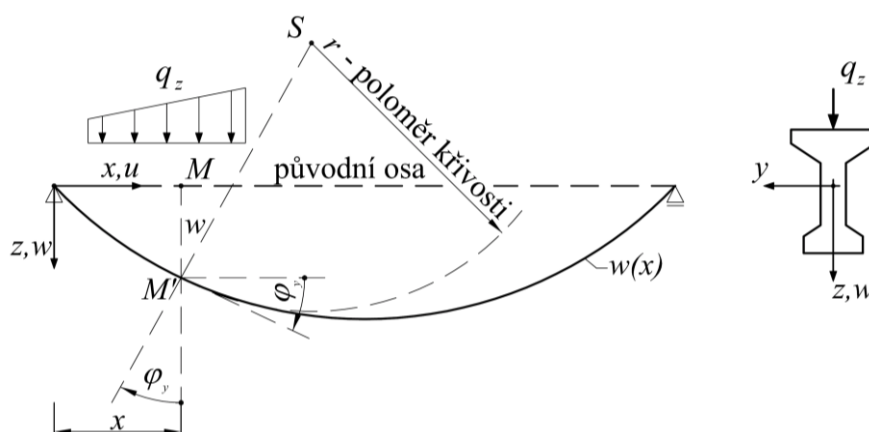
Pro válcované ocelové nosníky průřezu U, UE, UPE jsou polohy středu smyku uvedeny ve Statických tabulkách. Vzhledem k tomu, že jejich dílčí stěny nemají tvar obdélníků (zaoblení koutů, příp. sklon hran) liší se poněkud od hodnot daných vzorcem (5.33).

U tenkostěnných nosníků uzavřeného průřezu je úloha určení smykového napětí staticky neurčitá. K výpočtu je nutné definovat deformační podmínky. Výjimkou jsou jednodukovkové nosníky s osou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí v této rovině jsou rovna nule a jejich průběh po výšce je stejný jako u průřezu otevřeného, který vznikl rozdělením uzavřeného průřezu na dvě poloviny. Střed smyku leží u těchto nosníků na ose symetrie průřezu.

5.2 Průhyb ohýbaných nosníků a pootočení průřezů

5.2.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry

Přemístění ohýbaných nosníků je třeba zjišťovat z důvodu posouzení podle mezního stavu použitelnosti, tj. zda-li hodnoty průhybu a pootočení průřezu jsou v požadovaných mezích. Dále výpočet posunutí a pootočení je nezbytný pro výpočet staticky neurčitých konstrukcí.



Obr. 5.19 – Ohybová čára nosníku

Je-li nosník (prut) dostatečně štíhlý je jeho stav po deformaci určen tvarem ohybové čáry, křivky do níž přejde původně přímá osa nosníku pod vlivem zatížení. Mějme rovinnou úlohu, kdy sledujeme posun osy nosníku za ohybu. Osa nosníku pod vlivem zatížení ležícím v jedné z hlavních rovin setrvačnosti, např. v rovině xz se kříví ve stejné rovině, viz obr. 5.19.

Funkci průhybu budeme označovat w . Hodnota této funkce je kladná, jestliže posunutí odpovídajícího bodu bude ve směru osy z . Pootočení průřezu φ_y je úhel, o který se každý průřez potočí vzhledem ke své počáteční poloze. Úhel pootočení průřezu φ_y budeme předpokládat kladným, když toto pootočení bude ve směru od osy x k ose z .

Vzhledem, že se jedná o úhly malých hodnot lze předpokládat, že

$$\operatorname{tg} \varphi_y = \frac{dw}{dx}, \quad (5.34)$$

potom s dostatečnou úrovní přesnosti lze říci, že úhel pootočení φ_y je ve sledovaném průřezu roven derivaci funkce průhybu $w(x)$ podle souřadnice x

$$\varphi_y \approx \frac{dw}{dx}. \quad (5.35)$$

Z fyzikální představy o ohybu osy nosníku je zřejmé, že ohybová čára musí být spojitá a hladká křivka. Požaduje se, aby po délce osy nosníku byla funkce průhybu $w(x)$ spojitá včetně její derivace. Průhyby a úhly pootočení jsou přemístěními průřezů nosníku. Deformace každé části nosníku je dána zkřivením ohýbané osy, tj křivostí. Vliv posouvajících sil na zakřivení tenkých prutů je malý. Tedy v obecném případě příčného ohybu využijeme rovnici (5.7) ve tvaru

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)}. \quad (5.27)$$

Z kurzu vyšší matematiky je znám výraz pro křivost rovinné čáry ve tvaru

$$\frac{1}{r(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.28)$$

kde r je poloměr křivosti v rovině xz . Je nutno definovat, které znaménko bude pro uvedený případ souřadného systému vhodné. V případě tažených dolních vláken, viz obr. 5.19, přijmeme znaménko mínus, protože křivost je záporná.

Spojením rovnic (5.27) a (5.28) obdržíme

$$\frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)}. \quad (5.29)$$

Tato rovnice se nazývá přesnou diferenciální rovnicí ohybové čáry nosníku. Tato nelineární rovnice se řeší dosti složitě. Naštěstí v praktických úlohách jsou průhyby malé, takže lze přesnou rovnici nahradit přibližnou. Ve jmenovateli se vyskytuje člen

$$1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_y. \quad (5.30)$$

Při malých hodnotách průhybu, podle norem 1/100 až 1/1000 rozpětí, se ukazuje, že úhel pootočení je menší než 1° . Tangenta malého úhlu 1° je přibližně rovna 0,017. V druhé mocnině to je 0,0003, což je velmi malá hodnota ve srovnání s jedničkou. Tedy bez velké chyby můžeme zapsat

$$w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)}. \quad (5.31)$$



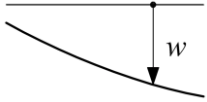
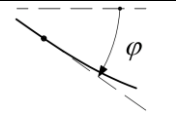
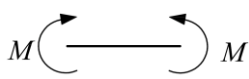
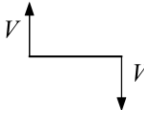
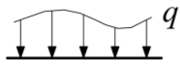
Tato rovnice se nazývá diferenciální rovnice ohybové čáry 2. řádu. Druhá derivace je tedy přímo úměrná ohybovému momentu $M_y(x)$ v daném místě a nepřímo úměrná ohybové tuhosti $EI_y(x)$.

Dalším dvojím derivováním obdržíme diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Pro případ nosníku s konstantní ohybovou tuhostí platí

$$w^{IV} = \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{q_z(x)}{EI_y}. \quad (5.32)$$



Z této rovnice vyplývá, že čtvrtá derivace průhybu je úměrná příčnému zatížení.

Označení a kladný smysl	Veličina	Diferenciální závislost	
		Obecný případ	Pro $EI = \text{konst.}$
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohybový moment	$M = -EIw''$	
	posouvající síla	$V = -(EIw''')$	$V = -EIw'''$
	příčné zatížení	$q = -(EIw^{IV})$	$q = -EIw^{IV}$

Tab. 5.2 – Diferenciální závislosti veličin nosníku

5.2.2 Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

U staticky určitých nosníků lze určit průhyb od ohybových momentů $M(x)$ přímo ze statických podmínek rovnováhy. Potom můžeme vyjít přímo z rovnice (5.31), kterou dvakrát integrujeme.

Postupná integrace



$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad (5.33)$$



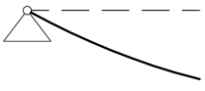
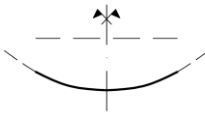
$$\varphi = w' = -\int \frac{M_y}{EI_y} dx + C_1, \quad (5.34)$$



$$w = -\int \left[\int \frac{M_y}{EI_y} dx \right] + C_1 x + C_2. \quad (5.35)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek nebo podmínek spojitosti, viz. tab. 5.2, 5.3.

Jedná se o podmínky kinematické (deformační). Veškeré statické podmínky, tab. 5.2, byly již respektovány při odvození ohybových momentů $M(x)$.

$w = 0$		Prostě podepřený okraj
$w' = 0$ $w = 0$		Vetknutý okraj
$w' = 0$		Na ose symetrie

Tab. 5.3 – Kinematické okrajové podmínky



Příklad:

Odvoďte rovnici ohybové čáry prostého nosníku stálého průřezu, zatíženého plným rovnoměrným zatížením. Číselně určete maximální průhyb pro válcovaný ocelový nosník I260 při $l = 6 \text{ m}$ a $q = 16 \text{ kN.m}^{-1}$.

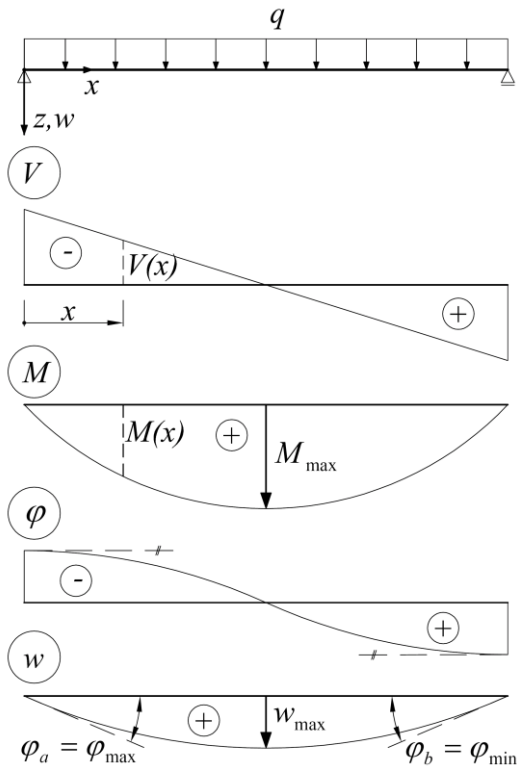
Řešení:

Ohybový moment v obecném průřezu

$$M_y(x) = Ax - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

Po dosazení do diferenciální rovnice ohybové čáry

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y} = -\frac{q}{2EI_y}(lx - x^2).$$

Obr. 5.20 – Průběhy V , M , φ a w

Postupnou integrací získáme

$$\varphi(x) = w'(x) = -\frac{q}{2EI_y} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1,$$

$$w(x) = -\frac{q}{2EI_y} \left(l \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2.$$

Integrační konstanty získáme z okrajových podmínek – podmínek uložení nosníku.

Na obou koncích nosníku je průhyb nulový $w(x=0)=0$, $w(x=l)=0$.

Po dosazení do rovnic pro průhyb určíme integrační konstanty.

Nejprve zavedeme podmínku pro levý konec $w(x=0)=0$, potom

$$w(x=0) = 0 + 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Podmínka $w(x=l)=0$ na pravém okraji nosníku vede na rovnici.

$$w(x=l) = -\frac{q}{EI_y} \left(l \frac{l^3}{6} - \frac{l^4}{12} \right) + C_1 l + C_2 = 0. \text{ Z této rovnice po dosazení } C_2 = 0$$

získáme $C_1 = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI_y}$. Po dosazení konstant do výchozích rovnic získáme

v konečném tvaru rovnici pro výpočet pootočení a rovnici ohybové čáry

$$\varphi(x) = -\frac{q}{2EI_y} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{ql^3}{24EI_y} = \frac{q}{24EI_y} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3).$$

$$w(x) = \frac{q}{24EI_y} x(l^3 - 2l^2x + x^3).$$

Průběhy funkcí pootočení průřezu a průhybu jsou uvedeny na obr. 5.20.

Max. průhyb (vzhledem k symetrii) je uprostřed rozpětí

$$w_{\max} = w\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y}.$$

Polohu extrémních hodnot pootočení lze získat derivací funkce pootočení

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{q}{24EI_y} (-12lx + 12x^2) = 0 \Rightarrow x(x-l) = 0. \text{ Extrém lze očekávat v mís-}$$

tech $x=0$, $x=l$ odpovídajících místům podepření. Po dosazení těchto souřadnic získáme extrémní hodnoty pootočení

$$\varphi(x=0) = \frac{ql^3}{24EI_y}, \quad \varphi(x=l) = -\frac{ql^3}{24EI_y}.$$

Vztahy $w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y}$, $\varphi_a = \varphi_{\max} = \frac{ql^3}{24EI_y}$, $\varphi_b = \varphi_{\min} = -\frac{ql^3}{24EI_y}$ jsou uvedeny ve statických tabulkách nebo průvodech.

Číselně: $q = 16 \text{ kN.m}^{-1}$, $l = 6 \text{ m}$, profil I260 $\Rightarrow I_y = 57,4 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^4$,
 $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$,

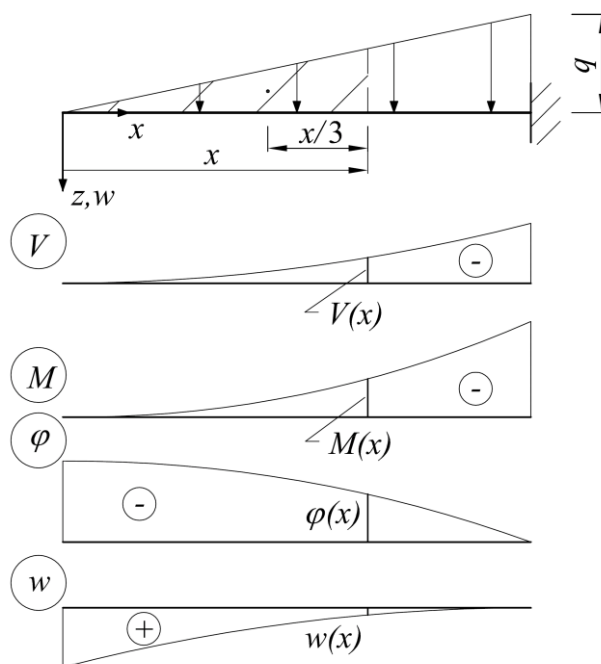
$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 57,4 \cdot 10^{-6}} = 0,0168 \text{ m} = 16,8 \text{ mm},$$

$$\varphi_{\max} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{24 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 57,4 \cdot 10^{-6}} = 8,96 \cdot 10^{-3} = 0,513^\circ.$$



Příklad:

Odvod'te rovnici ohybové čáry a velikosti průhybu a pootočení volného konce konzoly stálého průřezu zatížené trojúhelníkovým zatížením. $EI_y = \text{konst.}$



Obr. 5.21 – Průběhy V , M , φ a w

Řešení:

Intenzita příčného zatížení

$$q(x) = q \frac{x}{l}.$$

Nejprve určíme funkci momentu M_y .

$$M_y(x) = -\frac{qx}{l} x \frac{1}{2} \frac{x}{3} = -\frac{qx^3}{6l}.$$

Po dosazení do diferenciální rovnice ohybové čáry obdržíme rovnici

$$w''(x) = -M_y(x) = \frac{qx^3}{6lEI_y}.$$

Dále tuto rovnici dvakrát integrujeme. Tímto získáme vztah pro velikost pootočení a průhybu v libovolném bodě x konzoly.

$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{qx^4}{24lEI_y} + C_1 \quad \text{a} \quad w(x) = \frac{qx^5}{120lEI_y} + C_1x + C_2$$

Výpočet integračních konstant získáme po zavedení okrajových geometrických podmínek ve vetknutí. Průhyb a pootočení na pravém konci (ve vetknutí) nosníku je roven nule. Potom platí

$$\varphi(x=l) = w'(x=l) = \frac{ql^4}{24EI_y} + C_1 = 0, \quad w(x=l) = \frac{ql^5}{120EI_y} + C_1l + C_2 = 0.$$

Řešením soustavy rovnic obdržíme konstanty $C_1 = -\frac{ql^3}{24EI_y}$ a $C_2 = \frac{ql^4}{30EI_y}$.

Zpětným dosazením do funkcí průhybu a pootočení průřezu, obdržíme výsledné řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{qx^4}{24EI_y} - \frac{ql^3}{24EI_y},$$

$$w(x) = \frac{qx^5}{120EI_y} - \frac{ql^3}{24EI_y}x + \frac{ql^4}{30EI_y}.$$

Extrémní hodnoty průhybu určíme tak, že nejprve získáme místo, kde lze očekávat extrém průhybu, a to ze vztahu

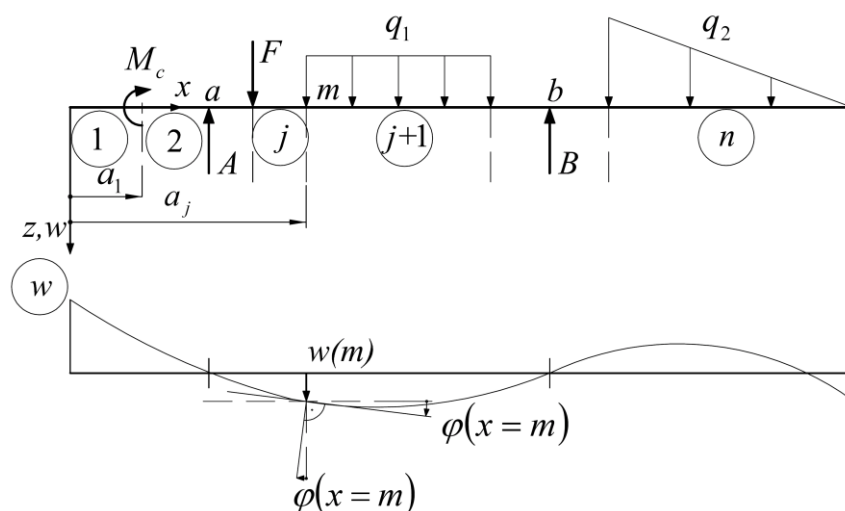
$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{qx^4}{24EI_y} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Po dosazení souřadnice $x = 0$, do výrazu pro průhyb obdržíme hodnotu maximální průhybu $w_{\max} = w(x=0) = \frac{ql^4}{30EI_y}$.

Obdobně se vyčíslí extrémní hodnoty pootočení

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{qx^3}{6EI_y} = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ Potom } \varphi_{\min} = \varphi(x=0) = -\frac{ql^3}{24EI_y}.$$

Jedná-li se o maximum či minimum určíme buď z fyzikálních představ o chování konstrukce nebo pomocí druhé derivaci funkce. Je-li druhá derivace v daném bodě kladná jedná se o minimum, je-li záporná o maximum.



Obr. 5.22 – Složitější případy zatížení



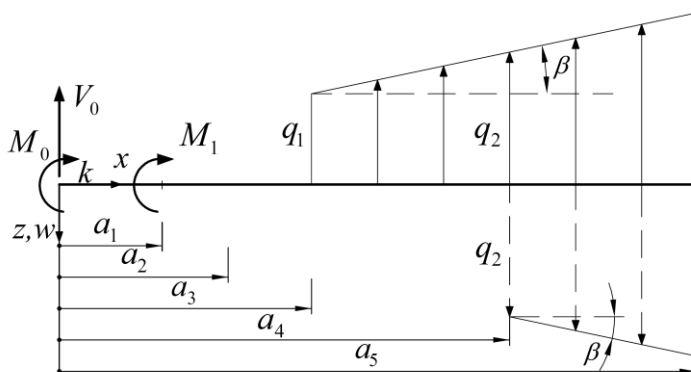
Při složitějším (nespojitém zatížení) nebo podepření nosníku nelze průběh ohybových momentů vyjádřit jedinou funkcí (výrazem). Pak je třeba rozdělit celý vyšetřovaný obor na jednotlivé intervaly a v každém z nich integrovat diferenciální rovnici zvlášť, viz obr. 5.22. Je-li počet intervalů n , vyvstane při integraci celkem $2n$ integračních konstant C_{1j}, C_{2j} ($j = 1, \dots, n$). Po zavedení okrajových podmínek spojitosti mezi jednotlivými oblastmi musíme řešit $2n$ rovnic. Tento obecně navržený postup se jeví prakticky nevhodný.

Pro ruční výpočet nosníků s konstantním průřezem lze s výhodou použít metodu, která integrační postup upravuje, tak abychom pracovali pouze se dvěma integračními konstantami. Vhodný postup navrhl Clebsch.

Řešení průhybů a pootočení nosníků Clebschovou metodou

Základní myšlenka vychází z předpokladu, že řešení lze provést takovým způsobem, aby integrační konstanty byly stejné pro všechny části nosníku. Toto platí pouze tehdy, kdy v rovnicích momentů, pootočení a průhybů při přechodu od předchozího intervalu k následujícímu intervalu se opakují všechny členy z předcházejících intervalů.

Nově vstupující členy jsou rovny nule na levých hranicích svých intervalů.



Obr. 5.23 – Clebschova metoda

Pro splnění uvedených podmínek při sestavování diferenciálních rovnic ohybové čáry a při jejich integraci je nutno dodržet tyto pravidla:

1. počátek souřadnic volíme v krajním levém bodě zkoumaného nosníku a platí pro všechny intervaly,
2. rovnici $M_y(x)$ sestavujeme od všech působících sil nalevo od sledovaného průřezu,
3. při zavádění osamělého momentu je nutno jej přenásobit členem $(x - a_i)^0$ (a_i souřadnice polohy momentu),
4. v případě ukončení spojitého zatížení je nutné jej uvažovat až do konce nosníku a od místa ukončení zatížení přiložit kompenzující zatížení, rovněž probíhající až do konce nosníku
5. integrace se provádí bez odstranění závorek
6. v případě vnitřního kloubu je nutno vzájemné pootočení průřezu α přenásobit členem $(x - a_i)^0$ (a_i souřadnice polohy kloubu), α je neznámé pootočení vyjadřující nespojitost v pootočeních v místě i

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{q_2 - q_1}{a_5 - a_4}$$

Pro úspornost zápisu přitom vyjadřujeme každou veličinu jedinou rovnicí, v níž určitým způsobem rozlišujeme platnost jednotlivých členů v integračních intervalech.

Podle obr. 5.23

$$M_y(x) = M_{y0} + V_{z0}x + M_{1y}(x - a_1)^0 + P(k - a_2) + \quad (5.35)$$

$$+ q_1 \frac{(x - a_3)^2}{2} + k \frac{(x - a_3)^3}{6} - q_2 \frac{(x - a_4)^2}{2} - k \frac{(x - a_4)^3}{6}$$

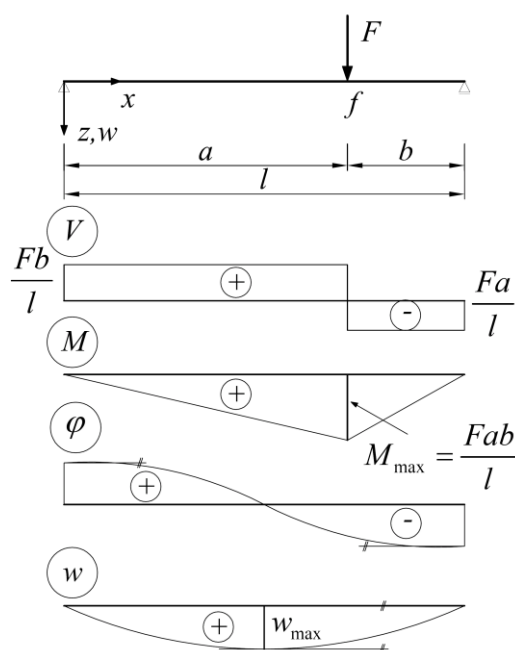
Integrací podle uvedeného pravidla obdržíme výrazy, které identicky splňují podmínky spojitosti, takže vyvstanou pouze dvě integrační konstanty. Ty určíme z podmínek v podepření.

V případě, že bychom vzali hodnoty průhybu w_0 a pootočení φ_0 v bodě k lze zapsat výsledné řešení ve tvaru

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x - \frac{1}{EI_y} \left[M_{y0} \frac{x^2}{2!} + V_{z0} \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x - a_1)^2}{2!} + \sum P \frac{(x - a_2)^3}{3!} \right. \quad (5.36)$$

$$\left. + \sum q_1 \frac{(x - a_3)^4}{4!} - \sum q_2 \frac{(x - a_4)^4}{4!} + \sum k \frac{(x - a_3)^5}{5!} - \sum k \frac{(x - a_4)^5}{5!} \right]$$

V tomto případě mluvíme o metodě počátečních parametrů. Hodnoty w_0 a φ_0 většinou neznáme, proto je lépe použít úpravu podle Clebsche.



Obr. 5.24 – Průběhy V , M , φ a w

Příklad:

Odvoďte rovnici ohybové čáry prostého nosníku stálého průřezu ($EI_y = \text{konst.}$) zatíženého silou F v obecné poloze.

Řešení:

Nejprve vyčíslíme reakci

$$A = \frac{Pb}{l}.$$

Najdeme průběh momentu pro celou oblast

$$M_y = Ax - F(x - a) = F \frac{b}{l} x - F(x - a)$$

Po dosazení do diferenciální rovnice

$$w''(x) = -\frac{M_y}{EI_y} = -\frac{1}{EI_y} \left[\underbrace{F \frac{b}{l} x}_{\leftarrow a} - \underbrace{F(x-a)}_{\leftarrow l} \right].$$

Po integraci obdržíme

$$\varphi(x) = w'(x) = C_1 - \frac{1}{EI_y} \left[\underbrace{\frac{Fb}{l} \frac{x^2}{2}}_{\leftarrow a} - \underbrace{F \frac{(x-a)^2}{2}}_{\leftarrow l} \right],$$

$$w(x) = C_1 x + C_2 - \frac{1}{EI_y} \left[\underbrace{\frac{Fb}{l} \frac{x^3}{6}}_{\leftarrow a} - \underbrace{F \frac{(x-a)^3}{6}}_{\leftarrow l} \right].$$

Nyní zavedeme okrajové podmínky pro levý konec do rovnice pro průhyb $w(x=0)=0$.

Tímto získáme konstantu $C_2 = 0$.

Dále zavedeme do rovnice pro průhyb okrajovou podmínku pro pravou podporu $w(x=l)=0$.

$$\text{Po dosazení } C_2 = 0 \text{ a úpravě vztahu } C_1 l + \overset{=0}{C_2} - \frac{1}{EI_y} \left[\frac{Fb}{l} \frac{l^3}{6} - \frac{F(l-a)^3}{6} \right] = 0$$

$$\text{Zjistíme, že } C_1 = \frac{b}{6lEI_y} (l^2 - b^2).$$

Po dosazení a úpravě získáme konečné rovnice pro průhyb a pootočení průřezu

$$w(x) = \frac{F}{6lEI_y} \left[\underbrace{bx(l^2 - b - x^2)}_{\leftarrow a} + \underbrace{l(x-a)^3}_{\leftarrow l} \right]$$

$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{F}{6lEI_y} \left[\underbrace{b(l^2 - b^2 - 3x^2)}_{\leftarrow a} + \underbrace{3l(x-a)^2}_{\leftarrow l} \right]$$

Například průhyb v místě působení síly ($x=a$)

$$w_f = w(x=a) = \frac{Fa^2b^2}{3lEI_y}.$$

Je-li břemeno v pravé polovině nosníku ($a > b$) vznikne max. průhyb v levém intervalu

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{F}{6lEI_y} [b(l^2 - b^2 - 3x^2)] = 0 \text{ v místě } x = \sqrt{\frac{a}{3}}(l+b). \text{ Po úpravě}$$

$$w_{\max} = \frac{Fab}{27lEI_y} (l+b) \sqrt{3a(l+b)}.$$

Průhyb ve středu nosníku $w_s\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{Fb}{48EI_y}(3l^2 - 4b^2)$.

Průběhy vnitřních sil, pootočení a průhybu je na obr. 5.24.



5.2.3 Mohrova analogie pro výpočet průhybů a pootočení průřezů

Mohrova metoda (analogie) umožňuje určit průhyby nebo pootočení staticky určitých nosníků bez využití diferenciálního a integrálního počtu převedením úlohy na statické řešení nosníků.



Rovinný případ (v rovině xz) ($M_y = M, V_z = V, q_z = q, I_y = I$).

Diferenciální rovnice

$$w(x) \Leftrightarrow \tilde{M}(x) \quad (5.37)$$



$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{dw(x)}{dx} \Leftrightarrow \tilde{V}(x) = \tilde{M}(x) = \frac{d\tilde{M}(x)}{dx} \quad (5.38)$$



$$\kappa(x) = w''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \Leftrightarrow \tilde{q}(x) = \frac{\tilde{V}'(x)}{dx} = -\tilde{M}''(x) \quad (5.39)$$



+ kinematické okrajové podmínky + statické okrajové podmínky

Určení průhybů $w(x)$ ze známého průběhu ohybových momentů $M(x)$ je analogické výpočtu ohybových momentů $\tilde{M}(x)$ od příčného zatížení $\tilde{q}(x)$. Je nutno zaměnit kinematické podmínky za statické. Tedy řešení neprovádíme na skutečném nosníku, ale na tzv. „fiktivním nosníku“, tj. nosníku se změněnými okrajovými podmínkami

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \Leftrightarrow \tilde{q}(x) = -\tilde{M}''(x)$$



neboli

$$\tilde{q}(x) = +\frac{M(x)}{EI(x)}$$

Zatížení na fiktivním nosníku

Ohybový moment na skutečném nosníku

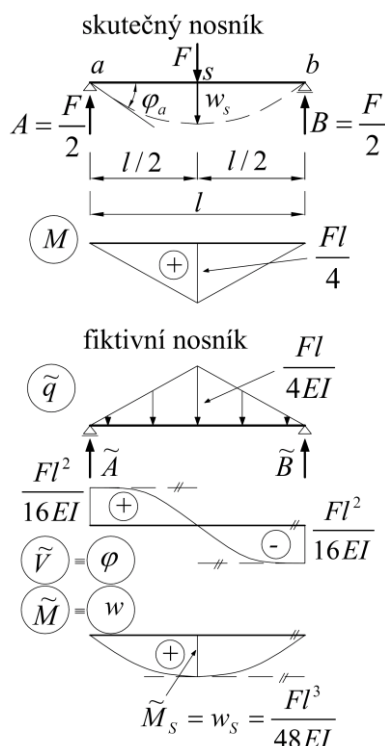
Postup při řešení (výpočet průhybů a pootočení) Mohrovou metodou

1. Vypočteme průběhy vnitřních sil na skutečném nosníku od skutečného zatížení. (získáme obrazec ohybových momentů $M(x)$).
2. Sestrojíme fiktivní nosník přidružený ke skutečnému nosníku, zatížíme jej momentovou plochou (kladné momenty zavádíme pro kladné zatížení $\tilde{q}$ - působí dolů) dělenou ohybovou tuhostí $EI(x)$.
3. Vypočteme hodnoty ohybových momentů $\tilde{M}(x) \Rightarrow w(x)$ a posouvajících sil $\tilde{V}(x) \Rightarrow \varphi(x)$.

Jsou-li ohybové momenty skutečného nosníku vyjádřeny v kNm je nutno ohybovou tuhost $EI(x)$ dosadit v kNm^2 , aby průhyb w vyšel v metrech a φ v radiánech.

Skutečný nosník		Fiktivní nosník	
Kinematické okrajové podmínky	Typ uložení	Statické okrajové podmínky	Typ uložení
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} = 0$ $\tilde{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\tilde{M} \neq 0$ $\tilde{V} \neq 0$	

Tab. 5.4 – Přehled vzájemně si odpovídajících okrajových podmínek



Obr. 5.25 – Průběhy vnitřních sil na skutečném i fiktivním nosníku

Příklad:

Prostý nosník stálého průřezu je ve středu rozpětí zatížen silou F . Určete průhyb pod břemenem a pootočení v levé podpoře.

Řešení:

Ohybový moment pod břemenem je roven $Fl/4$. Momentový obrazec dělený EI zavedeme jako zatížení na fiktivní nosník.

Podporová reakce

$$\tilde{A} = \tilde{B} = \frac{Fl}{4EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Fl^2}{16EI}$$

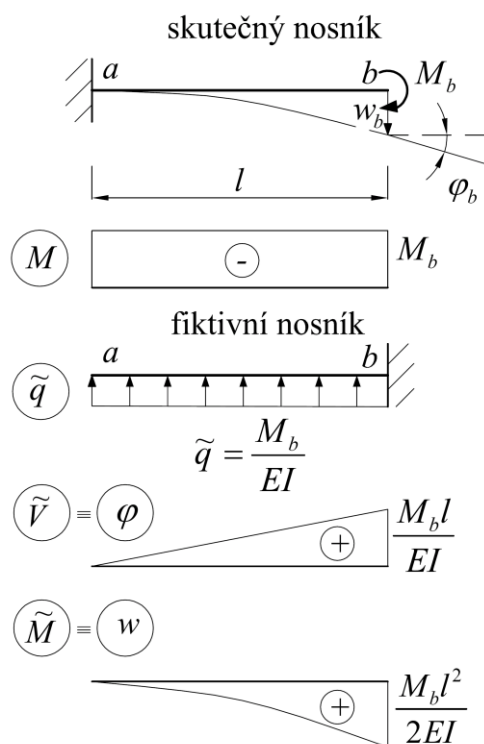
(vzhledem k symetrii).

Ohybový moment ve středu rozpětí

$$\begin{aligned} \tilde{M}_s &= \tilde{A} \frac{l}{2} - \frac{Fl}{4EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \\ &= -\frac{Fl^3}{32EI} - \frac{Fl^3}{96EI} = \frac{Fl^3}{48EI} = w_s. \end{aligned}$$



Posouvající síla na levém konci $\tilde{V}_a = \tilde{A} = \frac{Fl^2}{16EI} = \varphi_a$.



Obr. 5.26 – Průběhy vnitřních sil na skutečném i fiktivním nosníku

Příklad:

Určete průhyb a pootočení volného konce konzoly stálého průřezu zatížené momentem na volném konci.

Řešení:

Vyčíslíme moment na fiktivním nosníku

$$\tilde{M}_b = \frac{\tilde{q}l^2}{2} = \frac{M_b}{EI} \frac{l^2}{2} = \frac{M_b l^2}{2EI}.$$

Tento moment odpovídá průhybu na konci nosníku.

Obdobně

$$\tilde{V}_b = \tilde{q}l = \frac{M_b}{EI} l = \frac{M_b l}{EI}.$$

Výsledná hodnota průhybu a potočení

$$w_b = \tilde{M}_b = \frac{M_b l^2}{2EI}, \quad \varphi_b = \tilde{V}_b = \frac{M_b l}{EI}.$$

Nosníky proměnného průřezu

Určení přetvoření nosníků s proměnným průřezem je složitější úlohou, neboť moment setrvačnosti je funkcí souřadnice x , tedy $I_y = I_y(x)$ a integrace diferenciální rovnice je komplikovanější. Některé technicky významné případy, jako jsou nosníky s přímkovými či parabolickými náběhy, byly vyšetřeny a tabelovány.

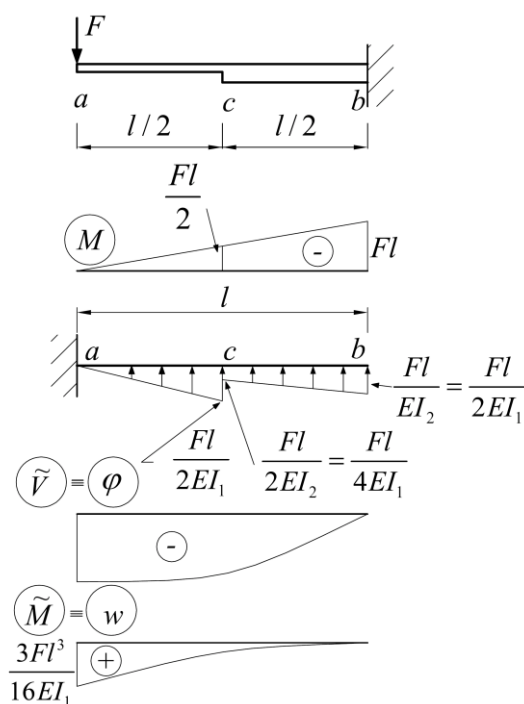
Nosníky s náhlou průřezovou změnou, s průřezem po úsecích konstantním je možné řešit obdobně jako v případě nosníku s konstantní ohybovou tuhostí. Délku prutu je nutno rozdělit na řadu intervalů s konstantním průřezem a na rozhraních užít podmínky spojitosti.

Příklad:

Určete průhyb volného konce konzoly zatížené na konci silou F , je-li moment setrvačnosti v pravé polovině nosníku dvojnásobný oproti levému úseku. $E = \text{konst.}$

Řešení:

Vyčíslíme průběhy vnitřních sil na skutečném nosníku. Dále vytvoříme fiktivní nosník, který zatížíme obrácenou hodnotou momentového obrazce. Souřadnice tohoto momentového obrazce jsou redukovány v jednotlivých částech ohybovými tuhostmi, viz zatížení fiktivního nosníku na obr. 5.26.



Obr. 5.27 – Průběhy vnitřních sil na skutečném i fiktivním nosníku

Vyčíslíme standardními postupy hodnotu momentu na fiktivním nosníku. Hodnota tohoto momentu odpovídá hledané hodnotě průhybu skutečného nosníku

$$w_a = M_a = \frac{Fl}{2EI_1} \frac{l}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} +$$

$$+ \frac{Fl}{4EI_1} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} \right) +$$

$$+ \frac{Fl}{4EI_1} \frac{l}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) =$$

$$= \frac{Fl^3}{4EI_1} \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{5}{24} \right) = \frac{3Fl^3}{16EI_1}$$

Průhyb volného konce

$$w_a = \frac{3Fl^3}{16EI_1}$$



5.3 Kontrolní otázky

1. Vysvětlete základní předpoklady pro výpočet normálových napětí v průřezu.
2. Jak je definován modul průřezu a jaký má význam při návrhu ohýbaného nosníku?
3. Proč se nemění délka vláken neutrální osy a jakých hodnot nabývají normálová napětí od ohybu v těchto vláknech?
4. Formulujte Grashofovy předpoklady ze kterých se vychází při výpočtu smyku za ohybu.
5. Popište rozdíl v průbězích smykových napětí na masivních a tenkostěnných profilech při ohybu nosníků.
6. Jaký má význam, aby zatížení působící na nosník procházelo středem smyku?
7. V čem spočívá podstata Clebschovy metody?
8. Vysvětlete princip výpočtů průhybů a pootočení metodou Mohrovy analogie.

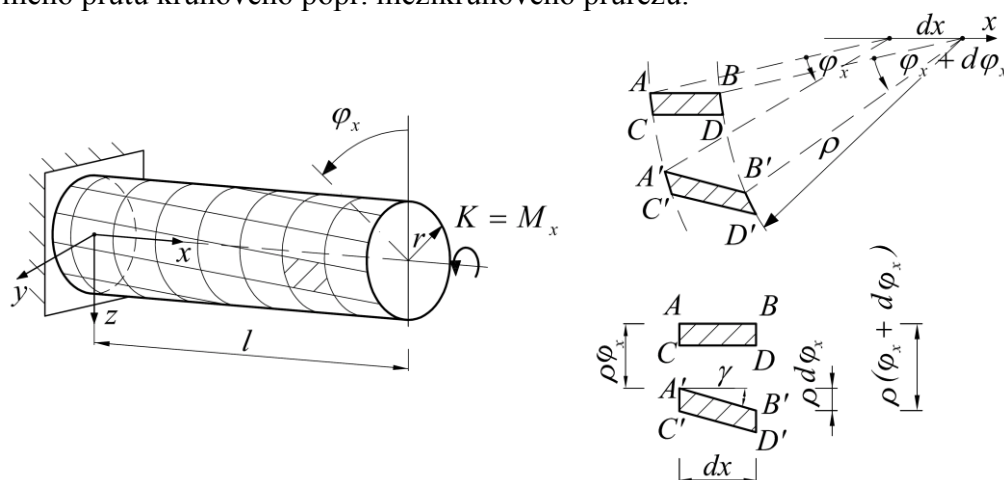
6 Kroucení

Uvažujeme-li přímý prut zatížený kroutícím momentem nebo dvojicí sil, tak, že jedinou nenulovou složkou výslednice vnitřních sil je krouticí (torzní) moment $M_x = K$, potom můžeme hovořit o prostém kroucení.



6.1 Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

Jednoduché řešení úlohy prostého kroucení lze získat v případě namáhání přímého prutu kruhového popř. mezikruhového průřezu.



Obr. 6.1 - Prosté kroucení prutu kruhového průřezu

Při odvození základních vztahů se vychází z těchto předpokladů:

1. střednice prutu před i po deformaci zůstává přímá,
2. průřezy prutu zůstávají rovinné i po deformaci a vzájemně se od sebe nevzdálí,
3. jednotlivé průřezy se pootácejí jako tuhé desky.

Za těchto předpokladů, lze předpokládat, že nevznikají v průřezích prutu poměrné osové deformace ε_x resp. normálová napětí σ_x ($\varepsilon_x = 0$; $\sigma_x = 0$). Ze třetího předpokladu lze určit velikost zkosení libovolného úseku délky dx , resp. úseku mezi body AB ležícího na podélném vláknu ve vzdálenosti ρ od střednice (úsek dx leží uvnitř prutu ne na jeho povrchu). Při pootočení průřezu x o obecný úhel φ_x se průřez $x+dx$ pootočí o úhel $\varphi_x + d\varphi_x$, resp. body A a B se posunou do nových poloh A' a B' , a tak dojde ke zkosení původně pravoúhlého prvku $ABCD$. Velikost zkosení je

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi_x}{dx} = \rho \theta, \quad (6.1)$$

kde

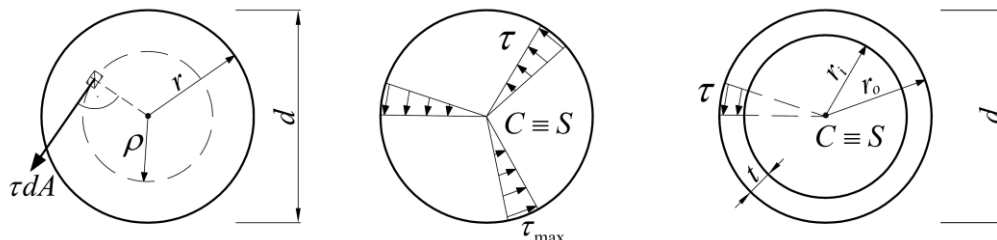
$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx}. \quad (6.2)$$

se nazývá poměrný úhel zkroucení [m^{-1}] a vyjadřuje intenzitu zkroucení.

S využitím Hookeova zákona ve smyku lze určit smykové napětí τ . Tedy platí

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta. \quad (6.3)$$

Smykové napětí v tomto případě má vždy směr kolmý k průvodiči, tj. směr odpovídá rovině zkosení.



Obr. 6.2 - Smykové napětí od kroucení v kruhovém a mezikruhovém průřezu

Ke stanovení poměrného úhlu zkroucení θ je možné použít podmínku statické ekvivalence, kde I_p je polární moment setrvačnosti ke středu kruhu, resp. I_t je moment tuhosti v kroucení, který je v případě kruhového průřezu totožný s polárním momentem setrvačnosti ($I_t = I_p$).

$$M_x = \int_A \rho \tau dA = \int_A \rho (G\rho\theta) dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p. \quad (6.4)$$

Pro obecnější vyjádření je vhodné vyjádřit poměrný úhel zkroucení v závislosti na tzv. momentu tuhosti v kroucení I_t [m^4], potom



$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_t}. \quad (6.5)$$

V případě kruhových průřezů $I_t = I_p$.

Po dosazení vztahu pro výpočet poměrného úhlu zkroucení θ do vztahu pro výpočet smykového napětí se získá vztah, který vyjadřuje úměrnost smykového napětí vzdálenosti od středu kruhu



$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho. \quad (6.6)$$

Maximální smykové napětí je na okraji průřezu při $\rho = r$. Potom



$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} r. \quad (6.7)$$

Deformaci krouceného prutu, tj. pootočení průřezu, φ_x v obecném místě prutu lze získat integrací podmínky statické ekvivalence (6.5) pro výpočet poměrného úhlu zkroucení θ , která je diferenciální rovnicí kroucení přímého prutu

$$\varphi_x = \int \frac{M_x}{GI_t} dx + C. \quad (6.8)$$

Neznámou integrační konstantu C lze určit z podmínky uložení, kde pootočení musí být nulové. Má-li počátek prutu x -ovou souřadnici rovnou nule, potom konstanta C je také rovna nule.

Deformaci krouceného prutu φ_x v obecném místě prutu lze pro základní případ přímého prutu stálého průřezu ($I_t = \text{konst.}$) zatíženého koncovým kroučícím momentem určit pomocí vztahu

$$\varphi_x(x) = \int \frac{M_x}{GI_t} dx = \frac{M_x}{GI_t} \int x dx = \frac{M_x}{GI_t} x. \quad (6.9)$$

Vzájemné pootočení koncových průřezů (úhel zkroucení) se zjistí dosazením $x = l$

$$\varphi_l = \frac{M_x l}{GI_t}. \quad (6.10)$$



Vztah pro výpočet úhlu zkroucení lze pokládat za Hookeův zákon pro základní případ kroucení prutu. Je-li prut složen z několika úseků, ve kterých je konstantní: kroučící moment M_{xi} , moment tuhosti v kroucení I_{ti} a modul pružnosti ve smyku G_i , pak lze vzájemné pootočení konců prutu definovat pomocí délek příslušných úseků l_i ve tvaru

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} l_i}{G_i I_{ti}}. \quad (6.11)$$



6.2 Kroucení prutů masivního nekruhového průřezu

Vztahy odvozené pro kroucení kruhového popř. mezikruhového průřezu neplatí pro případy kroucení obecných průřezů, protože neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů – dochází k jejich deplanaci, tj. porušení rovinnosti. Z hlediska bránění deplanaci průřezu lze rozdělit kroucení na:

- kroucení volné: deplanaci průřezů není zabráněno, normálová napětí $\sigma_x = 0$,
- kroucení vázané: deplanaci průřezů je zabráněno, normálová napětí $\sigma_x \neq 0$.

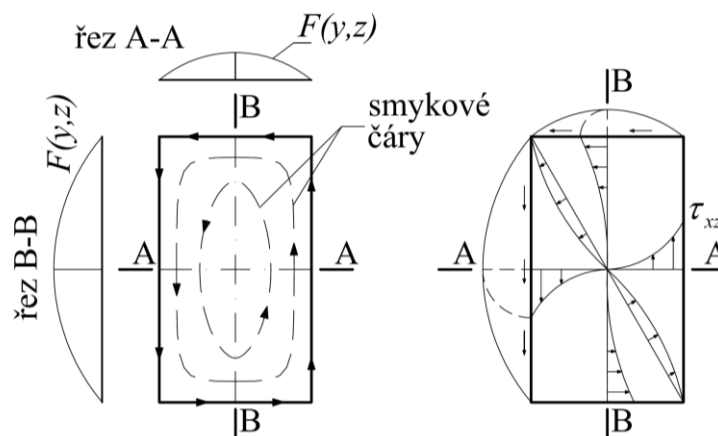
Volné kroucení

Řešení volného kroucení vychází z předpokladů:

1. příčný tvar průřezů se nemění,
2. každý průřez se otáčí okolo střednice prutu jako tuhý celek,
3. z důvodu nezabránění deplanace nevznikají v průřezu normálová napětí,
4. deplanace je shodná ve všech průřezích prutu.

Při odvozování se vychází z rovnic prostorové napjatosti tělesa. Odvození vede ke stanovení Prandtlovy funkce napětí $F(y, z)$, která má na okraji průřezů nulovou hodnotu. Pomocí této funkce lze vyjádřit složky smykových napětí

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} \text{ a } \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}. \quad (6.12)$$



Obr. 6.3 – Smyková napětí v prutu obdélníkového průřezu

Prandtlova funkce napětí $F(y,z)$ představuje plochu, která je umístěna nad průřezem. Sklon této plochy v libovolném místě udává velikost smykových napětí v kolmém směru. Vlastní tvar plochy lze získat experimentálně nebo pomocí numerických metod (MKP). Vrstevnice této plochy se nazývají smykovými čarami. Mezi dvěma sousedními čarami je smykový tok (tj. výsledná smyková síla na jednotku délky) konstantní.

Pomocí Prandtlovy funkce napětí $F(y, z)$ lze stanovit moment tuhosti v kroucení I_t , který je úměrný objemu Prandtlova vrchlíku. Platí

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A F(y,z) dA. \quad (6.13)$$

S využitím průřezového modulu v kroucení W_t lze jednoduše určit extrémní smykové napětí v průřezu, a to podle vztahu

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t}. \quad (6.14)$$

Pro obdélníkový průřez o stranách b a h ($b < h$) platí

$$I_t = \alpha b^3 h, \quad (6.15)$$

$$W_t = \beta b^2 h, \quad (6.16)$$

kde α a β jsou součinitelé, které lze interpolací získat z tab. 6.1.

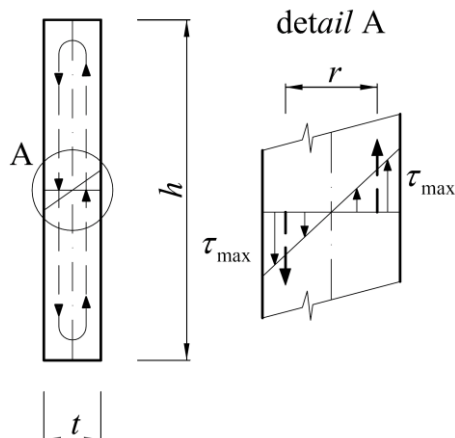
h/b	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3,0	5,0	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	1/3
β	0,240	0,243	0,249	0,258	0,267	0,292	0,312	1/3

Tab. 6.1 - Součinitelé pro výpočet průřezových charakteristik I_t a W_t obdélníkového průřezu

6.3 Volné kroucení tenkostěnných prutů otevřených průřezů

Tenkostěnné průřezy jsou průřezy, jejichž tloušťka t (stojiny t_w , pásnice t_f) vzhledem k ostatním rozměrům průřezu je výrazně menší ($t, t_w, t_f \ll b, h$). Při výpočtu tenkostěnných otevřených průřezů se předpokládá, že příčný řez se skládá z konečného počtu protáhlých obdélníkových částí. Moment tuhosti v kroucení I_t a průřezový modul v kroucení W_t lze vyjádřit s přihlédnutím k tab. 6.1 ($b/h = t/h = \infty$, $\alpha = b = 1/3$) ve tvaru



$$I_t = \frac{1}{3} t^3 h, \quad (6.16) \quad (6.17)$$

$$W_t = \frac{1}{3} t^2 h = \frac{I_t}{t}. \quad (6.18)$$

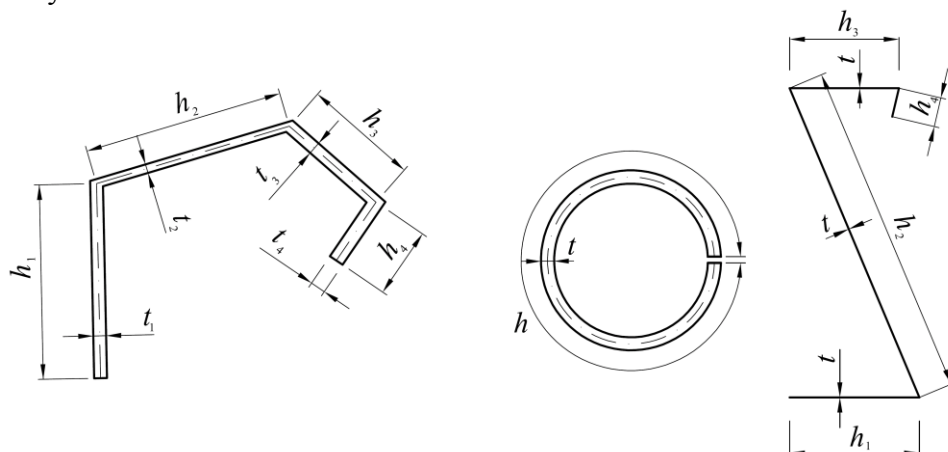
Uvedené vztahy platí i pro případ zakřivené střednice. Výškou h potom rozumíme délku střednice.

Moment tuhosti v kroucení I_t v případě průřezu složeného z n dílčích obdélníkových úseků lze vyjádřit ve tvaru

Obr. 6.4 – Rozdělení napětí ve stěně tenkostěnného profilu

$$I_t = \eta \sum_{i=1}^n I_{ti} = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 h_i, \quad (6.19)$$

kde η je korekční součinitel charakterizující vliv skutečného poměru t/h , zaoblení průřezů v místě styku stojiny s pásnicí atd. Korekční součinitelé jsou uvedeny v tab. 6.2.



Obr. 6.5 – Příklady tenkostěnných profilů otevřeného průřezu

K nalezení extrémní hodnoty smykového napětí lze použít průřezový modul v kroucení W_t . Extrémní napětí vznikne v části, s největší tloušťkou, takže průřezový modul v kroucení je minimální

$$W_t = W_{t,\min} = \frac{I_t}{t_{\min}}. \quad (6.20)$$

Uvedený vzorec neplatí pro místa spojení jednotlivých stěn, v místech prudké změny tloušťky apod.

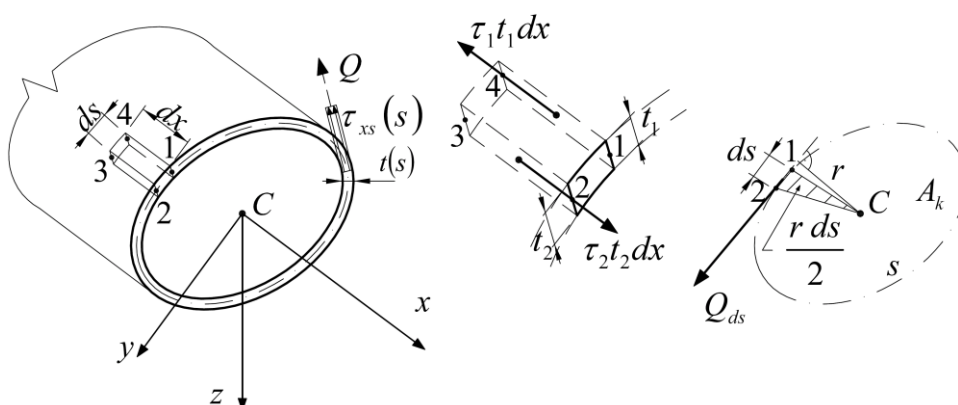


Průřez ocelového nosníku	η
Úhelník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I – průřez s výztuhami přivařenými k pásům a stěně	1,50
Svařovaný T – průřez s trojúhelníkovými výztuhami	1,40
Nýťovaný I – průřez, pásy z přírub úhelníků a z pásnic	0,50

Tab. 6.2 - Korekční součinitelé η podle Ruteckého

6.4 Volné kroucení prutů tenkostěnných uzavřených průřezů

Rozložení smykových napětí u tenkostěnných uzavřených průřezů je značně odlišné od rozložení v případě tenkostěnných otevřených průřezů. Je-li tloušťka stěn t uzavřených průřezů malá, ve srovnání s ostatními rozměry, lze předpokládat konstantní rozdělení napětí po tloušťce stěn. Směr působení smykových napětí je tečný k obrysu průřezů.



Obr. 6.6 – Kroucení tenkostěnného prutu uzavřeného průřezu

Výslednice smykových napětí v libovolném řezu, tzv. smykový tok Q , je konstantní podél střednice uzavřeného tenkostěnného průřezu.

$$Q = \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_{xs}(s) t(s) = \text{konst.} \quad (6.21)$$

Hodnotu smykového toku Q lze určit z podmínky rovnováhy

$$\tau_2 t_2 dx - \tau_1 t_1 dx = 0, \quad (6.22)$$

Mezi krouticím momentem M_x a smykovým tokem Q existuje závislost, kterou lze získat integrací momentových silových účinků podél uzavřené střednice průřezu.

$$M_x = \oint_s dM_x = \oint_s Q r ds = Q r \oint_s ds = Q \cdot 2 A_k. \quad (6.23)$$



Ve vztahu je r kolmá vzdálenost těžiště a tečny ke střednici v libovolném bodě a A_k je plocha průřezu ohraničená střednicí průřezu. Pomocí plochy A_k lze vztah pro výpočet smykového napětí vyjádřit ve tvaru

$$\tau_{xs} = \tau_{xs}(s) = \frac{Q}{t(s)} = \frac{Q}{2A_k t(s)}. \quad (6.24)$$

Z rovnice vyplývá, že maximální smykové napětí vznikne v průřezu s minimální tloušťkou $t(s) = t_{\min}$. Potom lze průřezový modul v kroucení uzavřeného průřezu W_t zapsat ve tvaru:

$$W_t = 2A_k t_{\min}, \quad \text{první Bredtův vzorec.} \quad (6.25)$$



Moment setrvačnosti průřezu v kroucení I_t (Bredtova tuhost v kroucení) lze odvodit pomocí posunů bodů ležících na střednici průřezu a má tvar

$$I_t = \frac{M_x}{G\theta} = \frac{4A_k^2}{\oint_s \frac{ds}{t(s)}}, \quad \text{druhý Bredtův vzorec.} \quad (6.26)$$

Při výpočtech se velmi často používá upravený vztah, ve kterém se integrál po křivce s nahrazuje součtem podílů délek, resp. výšek, obdélníků h_i na které je příčný řez rozdělen a jejich tloušťek t_i .

$$I_t = \frac{M_x}{G\theta} = \frac{4A_k^2}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}}. \quad (6.27)$$



6.5 Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi volným a vázaným kroucením ?
2. Jaký je rozdíl ve výpočtu momentu tuhosti v kroucení u masivního a tenkostěnného průřezu ?

7 Závěr

7.1 Shrnutí



Čtenář se měl možnost v tomto modulu seznámit se čtyřmi základními případy namáhání přímého prutu.

V kapitole pojednávající o prostém tahu a tlaku byly definovány pojmy normálové napětí v tahu a tlaku, deformace a posunutí. Za inženýrských předpokladů jsou odvozeny základní vztahy pro napětí a poměrnou deformaci a posun průřezu. Na elementárních příkladech bylo ukázáno jak tyto veličiny vyčíslit. Část této kapitoly se zabývá návrhem a posouzením průřezu prutu. Dále je pojednáno o vyčíslení vnitřních sil a posunutí bodů složené konstrukce.

V kapitole zabývající se prostým smykem jsou zavedeny pojmy smykového napětí a smykových deformací. Na elementárních příkladech bylo ukázáno jak tyto veličiny vyčíslit.

V nejvíce rozsáhlé kapitole věnované prostému ohybu a smyku za ohybu se objevují pojmy napětí od ohybu a opakovaně s větší přesností napětí od smyku. Na základě hypotéz jsou odvozeny základní vztahy pro výpočet napětí od ohybu a poměrných deformací. Část této kapitoly je věnována návrhu a posouzení průřezu. Je definován pojem průřezový modul. Je nastíněna teorie zabývající se rozdělením napětí od smyku v masivních a tenkostěnných prutech. Je definován pojem střed smyku (ohybu). Dále následuje odvození diferenciální rovnice ohybové čáry. Podrobně na mnoha příkladech je uveden postup výpočtu průhybu a pootočení průřezu nosníku metodami přímé integrace nebo metodou analogie diferenciálních rovnic.

Případ prostého kroucení je popsán v poslední kapitole. Jsou zde zavedeny pojmy vztahující se k prutům masivního jak kruhového tak i nekruhového průřezu. Určuje se smykové napětí a úhel pootáčení průřezů. Je dána definice momentu setrvačnosti v kroucení a průřezového modulu v kroucení. Část je věnována kroucení tenkostěnných otevřených a uzavřených průřezů. Vyčísluje se opět moment setrvačnosti v kroucení a průřezový modul v kroucení.

Pochopení a osvojení si znalostí tohoto modulu je nezbytné pro další studium třetího modulu, který je věnován speciálně definovaným případům složeného namáhání a teorii vzpěru.

8 Studijní prameny

8.1 Seznam použité literatury

- [1] Timoshenko, S.: *History of Strength of Materials*, Dover Pubns, 1983.
- [2] Timoshenko, S., Goodier, J., N.: *Theory of Elasticity*, Mc Graw – Hill, 1951.
- [3] Green, A. E., Zerna, W.: *Theoretical Elasticity*, Oxford, 1963.
- [4] Craig, R. R.: *Mechanics of Materials, 2nd Edition*, Wiley Text Books, 1999.
- [5] Bitnar, Z. - Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky I*. Praha, vydavatelství ČVUT, 1992.
- [6] Kaiser, J. a kol. *Pružnost a plasticita I*. Bratislava, Alfa, 1990.
- [7] Servít, R. - Doležalová, E. - Crha, M. *Teorie Pružnosti a plasticity I*. Praha, SNTL/Alfa, 1981
- [8] Servít, R. - Drahoňovský, Z. - Šejnoha, J. - Kufner, V. *Teorie Pružnosti a plasticity II*. Praha, SNTL/Alfa, 1984
- [9] Šmírák, S. *Pružnost a plasticita I*. (skriptum), Brno, PC-DIR, 1995.
- [10] Teplý, B. - Šmírák, S. *Pružnost a plasticita II*. (skriptum), Brno, vydavatelství VUT, 1993.
- [11] Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J.: *Mechanika těles. Pružnost a pevnost I*. VUT v Brně, 1992.
- [12] Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P.: *Mechanika těles. Pružnost a pevnost II*. VUT v Brně, 1991.
- [13] Šmírák, S., Hlavinková, B., *Pružnost a plasticita I, příklady*, VUT v Brně, 2000.
- [14] Crha, M., Šmírák, S., Dočkal, P., *Pružnost a plasticita*, VUT v Brně, 1991.
- [15] Rektory, K. a kol.: *Přehled užité matematiky*, SNTL/Alfa, 1981.
- [16] Kaiser, J., Složka, V.: *Teória pružnosti a plasticity I*, Bratislava, 1979.
- [17] Kaiser, J., Složka, V.: *Teória pružnosti a plasticity III.*, Bratislava, 1982.
- [18] Janíček P., Florian, Z.: *Mechanika těles. Úlohy pružnosti a pevnosti I*. VUT v Brně, 1990.
- [19] Vlk, M.: *Mezní stavy a spolehlivost*, VUT v Brně, 1991.
- [20] Pokluda, J., Kroupa, F., Obdržálek, L.: *Mechanické vlastnosti a struktura pevných látek*, VUT v Brně, 1994.



- [21] Iljušin, A., A., Lenskij, V., S.: *Soprativlenije materialov*, Moskva, 1959.
- [22] Gere, J. M.: *Mechanics of Materials*, Thomson-Engineering, 2003

8.2 Seznam doplňkové studijní literatury



- [23] Roark, R. J.: *Formulas for Stress and Strain*, New York, Mc Graw – Hill, 1965.
- [24] Němec, J., Dvořák, J., Hoschl, C.: *Technický průvodce pružnost a pevnost*, Praha, SNTL, 1989.
- [25] Juliš, K., Brepta, R.: *Mechanika I. a II. díl*, SNTL, Praha, 1987.
- [26] Kadlčák, J., Kytýr, J.: *Statika stavebních konstrukcí I. Základy stavební mechaniky, Staticky neurčité prutové konstrukce*, VUT v Brně, 1998.
- [27] Kadlčák, J., Kytýr, J.: *Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce*, VUT v Brně, 2001.
- [28] Hořeší, J., Šafka, J. a kol.: *Statické tabulky, Technický průvodce 51*. SNTL, 1987.
- [29] Desai, C. S., Siriwardane, H. J.: *Constitutive Laws for Engineering Materials*, Prentice - Hall, 1984



8.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [30] Horníková, J., Burša, J. Šandera, P. *Pružnost a pevnost* (Interaktivní studijní text), Brno, vydavatelství VUT, 2002.